

5 L'ANALYSE DE LA VARIANCE

5.1 Principes de l'analyse de la variance

La comparaison de différentes populations est un des problèmes les plus courants de la statistique. Le but principal de l'analyse de la variance (Anova) est de comparer les moyennes de plusieurs populations vérifiant certaines conditions à partir d'échantillons prélevés dans ces populations.

Considérons que lors d'une expérience, nous nous intéressons à l'étude sur n unités expérimentales, des variations d'une variable y (rendement par exemple) en fonction d'un facteur étudié composé de I modalités bien définies (variétés par exemple) ; les modalités du facteur étudié sont affectées de manière aléatoire aux unités expérimentales.

Une telle expérience peut être modélisée par l'équation suivante :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \text{ avec } \varepsilon_{ij} \sim \text{iidN}(0, \sigma^2), \sum \alpha_i = 0 \\ i = 1, \dots, I ; j = 1, \dots, n_i ; n = \sum_i n_i$$

y_{ij} étant la valeur de la variable aléatoire y observée sur la $j^{\text{ème}}$ unité recevant le traitement i ;

μ est la moyenne générale ; α_i , appelé l'effet du traitement i , est l'écart entre la moyenne du traitement i et la moyenne générale ; et ε_{ij} est l'erreur résiduelle.

Afin de procéder à la comparaison des moyennes des traitements nous allons confronter, à partir des données observées, l'hypothèse nulle H_0 qui consiste à affirmer qu'il n'y pas d'effet dû aux traitements (c'est à dire que les traitements sont identiques) et l'hypothèse alternative H_1 qui revient à dire que les traitements ne sont pas identiques.

On peut montrer qu'on obtient l'expression suivante :

$$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i (y_i - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \\ SCT = SCM + SCR$$

Ceci montre que la variation centrée des observations est la somme de la dispersion due aux traitements (SCM) et d'une dispersion aléatoire (SCR). Ces sommes de carrés d'écart seront utilisés dans le test de H_0 contre H_1 .

En effet, on montre que, si H_0 est vraie, le rapport

$$F = \frac{SCM / (I - 1)}{SCR / (n - I)}$$

suit une loi de Fisher $F(I-1, n-I)$.

On calcule alors la probabilité sous H_0 qu'un $F(I-1, n-I)$ dépasse la valeur F calculée et cette valeur sera ensuite comparée au seuil α fixé.

Si cette probabilité p est inférieure à α , l'hypothèse H_0 est rejetée : on dit alors que les traitements sont significativement différents au seuil α .

Si la probabilité p est supérieure à α , l'hypothèse H_0 est acceptée au seuil α .

5.2 Analyse de la variance à un facteur étudié

5.2.1 Anovn à un facteur en randomisation totale

Le tableau d'analyse de la variance à un facteur en randomisation totale se présente comme indiqué ci-dessous :

Tableau Anova à un facteur en randomisation totale

Source de variation	Degrés de liberté	Somme des carrés	Carré moyen	F
Traitement	t-1	SCA	CM1	CMA/CMR
Résiduelle	n-t	SCR	CMR	

t : nombre de traitements ; n : nombre d'unités expérimentales

L'hypothèse d'égalité des traitements sera rejetée au niveau α lorsque le rapport CMA/CMR dépasse la valeur $f_{t-1, n-t, \alpha}$ lue sur la table de la loi de Fisher.

Exemple : Etude de l'effet de 3 formulations fongicides sur rendement en gousses d'arachide

Pour comparer les effets de 3 formulations fongicides sur le rendement en gousses d'arachide, nous disposons de 12 parcelles expérimentales et chacune des formulations est affectée de manière aléatoire à 4 de ces parcelles. Il s'agit ainsi d'étudier un facteur à 3 niveaux avec un dispositif expérimental en randomisation totale.

Nous présentons ci-dessous les résultats de l'analyse des données réalisée avec le logiciel Genstat 5.

***** Analysis of variance *****

Variate:: Rendement

Source of variation	d.f.	S.S.	m. s.	v. r.	F pr.
Formulation	2	149447.	14123.	0.40	0.684
Residual	9	1698300.	185700.		
Total	11	1847746.			

d.f. = nombre de degrés de liberté ; s.s. = somme des carrés ; m.s. = somme des carrés moyens
v.r. = rapport des variances = rapport des carrés moyens (F); F pr. = p

L'examen du tableau d'analyse de variance permet de noter que :

$$F = 0.40 \text{ et } P_{110}(F(2,9) > 0.40) = 0.684$$

On en déduit alors que l'hypothèse d'équivalence des formulations ne sera pas rejetée au seuil 5%, ce qui revient à dire qu'il n'y a pas d'effet significatif de la formulation fongicide sur le rendement en gousses d'arachide.

5.2.2 Anova à un facteur dans un dispositif en blocs aléatoires complets

Un tableau d'analyse de la variance d'un plan à un facteur étudié en blocs aléatoires complets a la présentation suivante :

Tableau Anova à un facteur en blocs aléatoires complets

Source de variation	Degrés de liberté	Somme des carrés	Carré moyen	F
Traitement	t-1	SCA	CMA	CMA/CMR
Bloc	r-1	SCB	CMB	CMB/CMR
Résiduelle	(t-1)(r-1)	SCR	CMR	

t : nombre de modalités du facteur étudié ; r : nombre de blocs

Le résultat du test des effets blocs ne doit être pris en compte qu'à titre indicatif. En effet, l'essai n'a pas été réalisé pour tester l'équivalence des blocs. Mais ce test permet de vérifier si les blocs ont été judicieusement constitués c'est à dire si le contrôle par les blocs de l'hétérogénéité du milieu expérimental a été efficace.

Exemple : Comparaison de l'effet de 10 variétés sur le rendement du mil

Il s'agit d'un essai dont l'objectif est de comparer 10 variétés de mil. Le dispositif expérimental est en blocs aléatoires complets (3 blocs) et la variable observée est le rendement de la culture. Les résultats de l'analyse des données sont présentés ci-après.

***** Analysis of variance *****

Variate: Rendement

Source of variation	d.f.	S.S.	m.s.	v.r.	F pr.
Bloc stratum	2	312203.	156102.	1.89	
Bloc.*Units* stratum					
Variete	9	2324836.	258315.	3.13	0.019
Residual	18	1486045.	82558.		
Total	29	4123084.			

Le test **associé au** facteur variétal **nous** conduit à affirmer qu'il existe des différences significatives au seuil 5% entre les rendements des différentes variétés.

Nous remarquerons que Genstat ne fournit pas explicitement la probabilité associée au test d'absence d'effet bloc. Ainsi si nous nous intéressons au test de l'effet bloc, nous devrions comparer la valeur du F correspondant à la valeur seuil donnée par une table de Fisher.

On lit sur une table de Fisher la valeur $f(2;18;0.05) = 3.55$ et comme $1.89 \leq 3.55$, on en déduit l'absence d'effet bloc au seuil 5%. On peut ainsi dire que les blocs n'ont pas permis de contrôler de manière efficace l'hétérogénéité du milieu.

5.3 Analyse de la variance à deux facteurs étudiés

Avec deux facteurs étudiés, il faut tout d'abord s'intéresser au test de l'interaction. Si l'interaction n'est pas significative on peut tirer des conclusions sur les effets principaux des deux facteurs. Par contre lorsque l'interaction est significative il ne faut pas conclure directement. Il faut dans ce cas examiner les résultats de plus près car l'interprétation peut devenir plus complexe. Une représentation graphique est souvent fort utile pour une interprétation correcte des résultats.

Exemple

Considérons un essai dont le but est d'étudier l'effet de 2 facteurs, la variété et la dose d'engrais, sur le rendement d'une culture. Les graphiques suivants présentent différents cas de figure possibles.

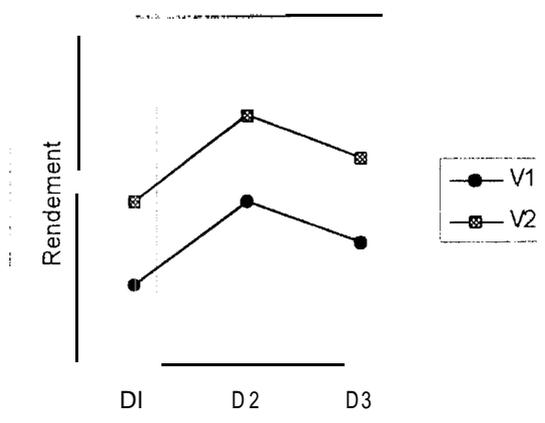


Figure 1 : Absence d'interaction

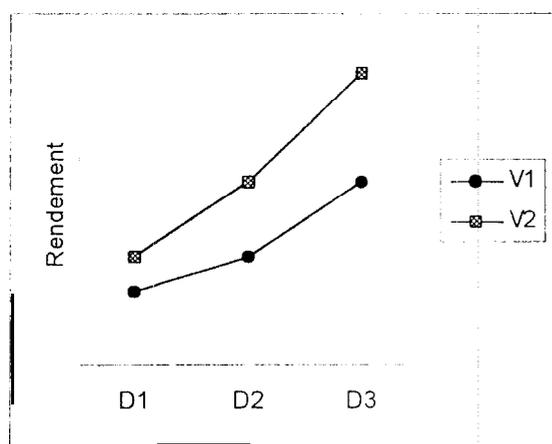


Figure 2 : Présence d'interaction

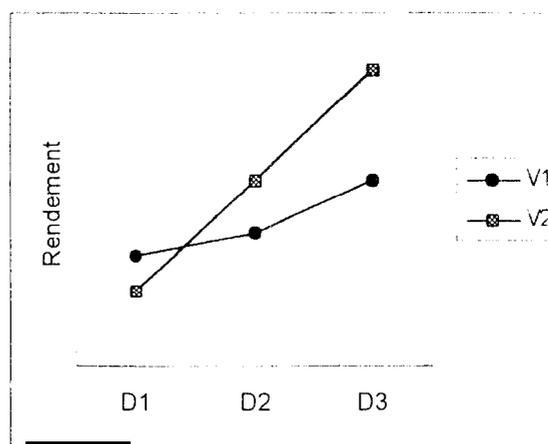


Figure 3 : Présence d'interaction

Nous pouvons noter d'après la figure 1 que l'écart entre les 2 variétés est indépendant de la dose d'engrais ; ce qui revient à dire qu'il n'y a pas d'interaction entre les 2 facteurs.

D'après les figures 2 et 3, on relève que les différences entre les variétés varient en fonction de la dose d'engrais utilisée. On dit alors qu'il y a une interaction entre les 2 facteurs

Dans le cas présenté par la figure 2, l'interaction a pour effet d'amplifier les différences entre les 2 variétés tout en conservant l'ordre des moyennes. Le test des effets dose et variété présente alors un intérêt.

Dans le cas présenté par la figure 3, l'interaction a pour effet d'inverser l'ordre des moyennes des variétés. Le test global des effets principaux des 2 facteurs perd son sens dans ce cas.

5.3.1 Anova à deux facteurs en randomisation totale

Le tableau d'analyse de la variance à deux facteurs étudiés dans un plan en randomisation totale se présente comme indiqué ci-dessous :

Tableau Anova à 2 facteurs en randomisation totale

Source de variation	Degrés; liberté	Carré moyen	F
Facteur A		CMA	CMA/CMR
Facteur B	J-1	CMB	CMB/CMR
Interaction AxB	(I-1)(J-1)	CMI	CMI/CMR
Résiduelle	IJ(r-1)	CMR	

I et J respectivement nombre de modalités des facteurs A et B ; r : nombre de répétitions

Exemple : Influence de différents régimes alimentaires sur la croissance pondérale

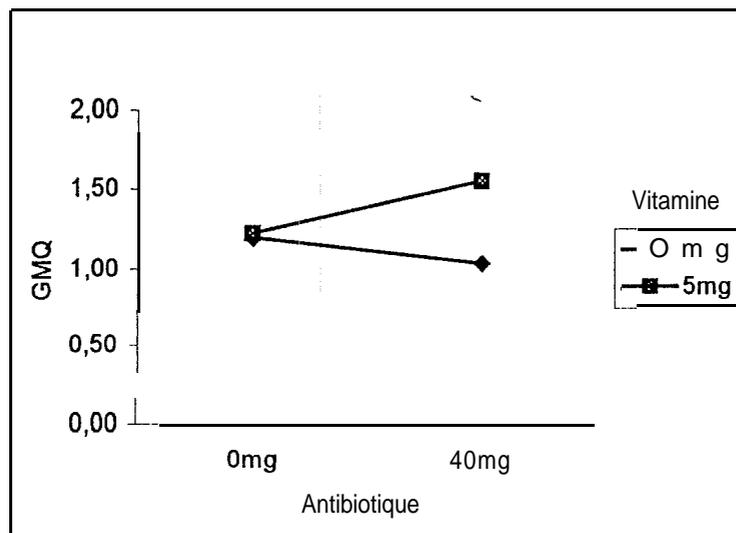
Il s'agit d'une expérimentation dont le but est d'étudier l'effet de deux facteurs, le supplément de vitamine B12 et le supplément d'antibiotique sur la croissance pondérale du porc. Chacun des deux facteurs a 2 niveaux (supplément, pas de supplément). Chacun des 4 régimes alimentaires ou traitement est apporté quotidiennement à un lot de 3 animaux choisis de manière aléatoire et le gain moyen quotidien de chaque porc est relevé à l'issue de l'expérience. Les résultats de l'analyse de la variance sont présentés ci-après :

***** Analysis of variance*****

Variate: GMQ

Source of variation	d.f.	s.s.	m. s.	v.l.	F pr.
Antibiotique	1	0.020833	0.020833	5.68	0.044
Vitamine	1	0.218700	0.218700	59.65	<.001
Antibiotique.Vitamine	1	0.172800	0.172800	47.13	<.001
Residual	8	0.029333	0.003667		
Total	11	0.441667			

L'examen de ces résultats nous permet tout d'abord d'affirmer que l'interaction des 2 facteurs étudiés est très hautement significative. L'existence d'une telle interaction signifie que l'influence du supplément d'antibiotique est fonction du supplément de vitamine. L'observation du graphique suivant permet d'avancer que la réponse au supplément d'antibiotique est fortement marquée en présence du supplément de vitamine alors qu'elle a même une tendance négative en son absence.



5.3.2 Anova à deux facteurs étudiés dans un dispositif en blocs aléatoires complets

Un tableau d'analyse de la variance d'un plan en blocs aléatoires complets à deux facteurs étudiés a la présentation suivante :

Tableau Anova à 2 facteurs en blocs aléatoires complets

Source de variation	Degrés de liberté	Carré moyen	F
Facteur 1	I-1	CM1	CM 1/CMR
Facteur 2	J-1	CM2	CM2 /CMR
Interaction	(I-1)(J-1)	CMI	CMI/CMR
Bloc	r-1	CMB	CMB/CMR
Résiduelle	(r-1)(IJ-1)	CMR	

I : nombre de niveaux du facteur 1 ; J : nombre de niveaux du facteur 2 ; r : nombre de blocs

Exemple : Etude de l'influence de l'application de différentes doses d'engrais azoté à des variétés de riz, sur le rendement de la culture

Il s'agit d'un essai disposé en 3 blocs aléatoires complets dont l'objectif est de comparer l'influence sur le rendement du riz de 5 traitements (4 doses d'engrais azoté et le témoin sans engrais) appliqués à 3 variétés de riz.

Le tableau suivant présente les résultats de l'analyse de la variance réalisée sur le rendement. On en déduit que l'interaction entre les 2 facteurs n'est pas significative. En outre, l'application

d'azote a un effet très hautement significatif sur le rendement du riz et les différences entre les rendements des variétés de riz sont significatives.

***** Analysis of variance *****

Variate: RENDEMENT

Source of variation	d.f.	s.s.	m.s.	V.r.	F pr.
BLOC stratum	3	2.5998	0.8666	5.73	
BLOC.*Units* stratum					
VARIETE	2	1.0528	0.5264	3.48	0.040
AZOTE	4	41.2347	10.3087	68.15	<.001
VARIETE.AZOTE	8	2.2907	0.2863	1.89	0.087
Residual	42	6.3528	0.1513		
Total	59	53.5309			

5.3.3 Anova à deux facteurs dans un dispositif en split plot

Un tableau d'analyse de la variance à deux facteurs étudiés dans un dispositif en split plot a la présentation suivante :

Tableau Anova à 2 facteurs en split plot

Source de variation	Degrés de liberté	Carré moyen	F
Facteur 1	I-1	CM1	CM 1/CMR1
Bloc	r-1	CMB	CMB/CMR1
Résiduelle 1	(I-1)(r-1)	CMR1	
Facteur 2	J-1	CM2	CM2/CMR2
Interaction	(I-1)(J-1)	CM 3	CM1/CMR2
Résiduelle 2	I(J-1)(r-1)	CMR2	

I : nombre de niveaux du facteur 1 ; J : nombre de niveaux du facteur 2 ; r : nombre de blocs

Exemple : Etude de l'effet de la fertilisation et de la variété sur la production du sésame

Il s'agit d'un essai réalisé en vue d'étudier deux facteurs la variété (5 variétés) et la fertilisation (2 niveaux de fertilisation dose de fertilisation et témoin non fertilisé). Le dispositif mis en place correspond à un split plot avec 3 blocs. La variété est en grandes parcelles et la fertilisation en petites parcelles.

L'examen des résultats présentés ci-dessous nous permet de dire que l'interaction entre les 2 facteurs variété et fertilisation n'est pas significative. De plus, l'effet de la fertilisation sur le rendement est significatif et il existe des différences très hautement significatives entre les rendements moyens des 5 variétés de sésame.

***** Analysis of variance *****

Variate: RENDEMENT

Source of variation	d.f.	S.S.	m.s.	v.r.	F pr.
BLOC stratum	2	536569.	268285.	21.14	
BLOC.VAR stratum					
VAR	4	810515.	202629.	15.96	<.001
Residual	8	101541.	12693.	1.29	
BLOC.VAR.TRAIT stratum					
TRAIT	1	97322.	97322.	9.85	0.011
VAR.TRAIT	4	69331.	17333.	1.75	0.214
Residual	10	98769.	9877.		
Total	29	1714048.			

5.4 Les méthodes de comparaison des moyennes

L'analyse de la variance nous permet de procéder au test de l'hypothèse d'égalité des traitements. Lorsqu'à l'issue du test on décide de rejeter cette hypothèse, c'est à dire qu'on déclare qu'il existe des différences significatives entre moyennes des traitements, il convient alors de déterminer, parmi celles-ci, celles qui sont significativement différentes.

Il existe différentes méthodes de comparaison des moyennes qui nous permettent de répondre à cette question. Mais il faut noter dès à présent qu'elles ne se valent pas toutes : le choix de l'une d'entre elles sera effectué judicieusement en fonction de l'objectif expérimental poursuivi et de la nature des traitements étudiés.

Par raison de commodité, on se limitera dans la suite au cas où les traitements sont répétés un même nombre de fois (plan équilibré)

5.4.1 La méthode de la plus petite différence significative

Lorsque l'hypothèse d'égalité des p traitements est rejetée, le test de Student nous permet de tester l'égalité des moyennes de deux traitements i et i' à l'aide de l'expression :

$$t_{obs} = \frac{|Y_i - Y_{i'}|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_i^2 + \hat{\sigma}_{i'}^2}{n}}}$$

avec Y_i et $Y_{i'}$ les moyennes respectives des traitements i et i' ; $\hat{\sigma}_i^2$ et $\hat{\sigma}_{i'}^2$ les estimations des variances respectives des 2 traitements et n le nombre de répétitions

En considérant l'hypothèse d'égalité de la variance des traitements, cette expression devient :

$$t_{obs} = \frac{|Y_i - Y_{i'}|}{\sqrt{2 \frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}$$

avec $\hat{\sigma}^2$ l'estimateur de la variance commune des traitements.

On calcule l'expression :

$$ppds = t_{1-\alpha/2} \sqrt{2\hat{\sigma}^2 / n}$$

et l'hypothèse d'égalité des 2 moyennes sera rejetée si la valeur observée de la différence entre ces moyennes est supérieure ou égale à cette quantité appelée plus petite différence significative (ppds).

Cette méthode est largement utilisée: en expérimentation agricole à cause de sa simplicité de mise en œuvre. Mais, il faut noter qu'avec p traitements, il existe $p(p-1)/2$ comparaisons de moyennes 2 à 2 qui peuvent ainsi être réalisées et donc autant de tests d'égalité de 2 moyennes. Le risque de 1^{ère} espèce de chacun de ces tests étant égal au niveau de signification α considéré, le risque global de 1^{ère} espèce, c'est à dire la probabilité de considérer à tort au moins une différence de moyennes comme significative peut être beaucoup plus important.

De ce point de vue l'utilisation de ce test n'est pas toujours appropriée. Elle est d'autant moins appropriée que le nombre de traitements étudiés devient élevé.

Exemple :

Une expérimentation est menée afin de comparer le poids de 1000 grains de 10 variétés de mil dans un dispositif expérimental constitué de 3 blocs aléatoires complets. L'analyse de la variance a mis en évidence un effet variétal significatif au seuil de 1%. Nous pouvons alors procéder à la comparaison multiple des moyennes.

$\hat{\sigma}^2 = 0.22$; nombre de degrés de liberté de la résiduelle = 18 ; $t_{1-\alpha/2} = 2.101$ avec $\alpha = 0.05$;

La valeur de la ppds est égale à 0.8046.

Les moyennes sont rangées ci-dessous par ordre décroissant. Les moyennes suivies de la même lettre ne sont pas significativement différentes.

V10 = 8.37	A
V5 = 7.87	AB
V1 = 7.23	BC
V9 = 7.13	BC
V2 = 7.10	BC
V7 = 6.97	C
V4 = 6.93	C
V8 = 6.90	C
V6 = 6.87	C
V3 = 6.63	C

5.4.2 La méthode de Bonferroni

La méthode de Bonferroni permet de tester toutes les comparaisons 2 à 2 de moyennes des traitements tout en contrôlant le risque global de 1^{ère} espèce α . Pour cela, chacun des tests sera réalisé avec un niveau de signification α' :

$$\alpha' \leq 2\alpha / p(p-1),$$

p étant le nombre de traitements étudiés.

Il faut souligner que cette méthode est assez conservatrice si p est élevé.

Exemple :

La comparaison des moyennes de l'exemple précédent en utilisant la méthode de Bonferroni nous fournit les résultats suivants :

$$ppds \text{ Bonferroni} = 1.48$$

V10	=	8.37	A
V5	=	7.87	A B
V1	=	7.23	A B
V9	=	7.13	A B
V2	=	7.10	A B
V7	=	6.97	A B
V4	=	6.93	A B
V8	=	6.90	A B
V6	=	6.87	B
V3	=	6.63	B

Les moyennes suivies de la même lettre ne sont pas significativement différentes.

5.4.3 La méthode de Newman et Keuls

L'amplitude d'un groupe de moyennes est définie par la plus grande différence entre 2 moyennes de ce groupe. Le principe de la méthode de Newman et Keuls repose sur la comparaison des amplitudes des groupes de k ($k \leq p$) moyennes à la plus petite amplitude attendue à un niveau de signification donné.

Un groupe de k moyennes est déclaré hétérogène, c'est à dire qu'il existe des différences entre les moyennes constituant ce groupe, si l'amplitude d_k du groupe est supérieure ou égale à la plus petite amplitude significative (ppas) relative à un groupe de k moyennes qui est définie par :

$$ppas(k) = q_{1-\alpha} \sqrt{\hat{\sigma}^2 / n},$$

$q_{1-\alpha}$ étant le quantile d'ordre α de l'étendue au sens de Student.

La mise en œuvre de cette méthode commence par la détermination de la ppas relative à p moyennes et la comparaison de l'amplitude observée des p moyennes à cette valeur.

Si l'amplitude observée ne dépasse pas la ppas, on dira alors que les p moyennes ne sont pas significativement différentes.

Lorsque l'amplitude observée est plus grande que la ppas relative à p moyennes, on comparera successivement l'amplitude des différents groupes de $(p-1)$ moyennes, $(p-2)$ moyennes, etc avec la ppas correspondante jusqu'à ce que l'amplitude observée d'un groupe soit inférieure à la ppas relative à ce groupe. Les moyennes constituant ce dernier groupe sont alors déclarées non significativement différentes.

Exemple : Comparaison des moyennes des variétés par la méthode de Newman et Keuls au seuil 5%

Nb de moyennes	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeurs ppas	0.80	0.917	1.07	1.14	1.20	1.25	1.29	1.33	1.36

V10 = 8.31 A
 V5 = 7.87 A B
 V1 = 7.23 B
 V9 = 7.13 B
 v2 = 7.10 B
 v7 = 6.97 B
 V4 = 6.93 B
 V8 = 6.90 B
 V6 = 6.87 B
 v3 = 6.63 B

5.4.4 La méthode de Dunnet

La méthode de Dunnet est une méthode de comparaison particulière en ce sens qu'elle ne porte que sur certaines comparaisons 2 à 2 de moyennes, la comparaison des (p-1) traitements à un traitement témoin. L'utilisation de cette méthode suppose ainsi la présence d'un traitement témoin (traitement de référence).

Un traitement sera déclaré significativement différent du témoin si l'écart entre la moyenne du traitement et celle du témoin est supérieur ou égal au plus petit écart significatif défini par :

$$d_{1-\alpha/2} \sqrt{2\hat{\sigma}^2 / n}$$

$d_{1-\alpha/2}$ est une valeur lue sur la table de Dunnet.