Correction du contrôle Biostat 2ème Année

Exercice 1 :

1- Détermination de n_2 et n_5

$$\begin{cases} \sum n_i = N \\ \bar{x} = \dfrac{\sum n_i c_i}{N} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_2 + n_5 + 145 = 220 \\ \dfrac{10 \times 0,85 + n_2 \times 1,35 + 75 \times 1,85 + 60 \times 2,35 + n_5 \times 2,85}{220} = 2,07727 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_2 + n_5 = 220 - 145 \\ 8,5 + 138,75 + 141 + n_2 \times 1,35 + n_5 \times 2,85 = 220 \times 2,07727 \end{cases}$$

$$\begin{cases} n_2 + n_5 = 75 \Rightarrow n_2 = 75 - n_5 \\ 1,35 n_2 + 2,85 n_5 = 168,7494 \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

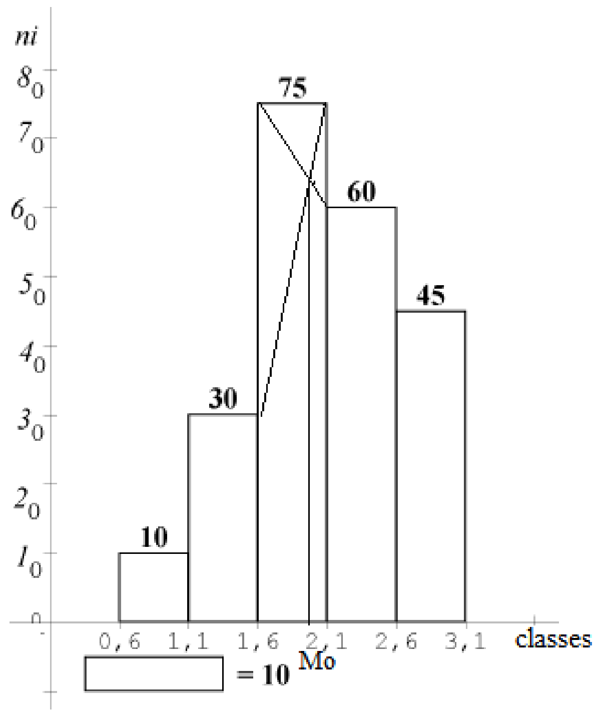
$$(2) \Rightarrow 1,35(75 - n_5) + 2,85 n_5 = 168,7494$$

$$1,5 n_5 = 168,7494 - 101,25 = 67,4994$$

$$\begin{cases} n_5 = \dfrac{67,4994}{1,5} = 44,9996 \approx 45 \\ n_2 = 75 - 45 = 30 \end{cases}$$

$n_i {c_i}^2$	7,225	54,675	256,6875	331,35	365,5125	1015,45
classes	[0,6-1,1[	[1,1-1,6[	[1,6-2,1[	[2,1-2,6[	[2,6-3,1[	
n_i	10	30	75	60	45	220
c_i	0,85	1,35	1,85	2,35	2,85	
$n_i \uparrow$	10	40	115	175	220	
			Q1 | Mo | Me	Q3		

2- Représentation graphique



3-1 Le mode

$$Mo = l_1 + \frac{n_i - n_{i-1}}{2n_i - (n_{i-1} + n_{i+1})}(l_2 - l_1)$$
$$avec\ Mo \in [1,6 - 2,1[$$

$$Mo = 1,6 + \left[\frac{(75 - 30)}{2 \times 75 - (30 + 60)}\right] 0,5$$

$$Mo = 1,975$$

3-2 La médiane

$$Me \equiv \frac{N}{2} \equiv 110 \Rightarrow Me \epsilon [1{,}6 - 2{,}1[$$

40	N/2=110	115
1,6	Me	2,1

$$Me = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{n_0}\left(\frac{N}{2} - F \uparrow\right) \Rightarrow Me = 1{,}6 + \frac{0{,}5}{75}(110 - 40) = 2{,}066$$

4 - La variance et l'écart-type

$$V(x) = \frac{\sum n_i {c_i}^2}{N} - \bar{x}^2$$
$$= \frac{10 \times (0{,}85)^2 + \cdots + 45 \times (2{,}85)^2}{200} - (2{,}07724)^2$$
$$= 0{,}30068$$

$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \quad \approx 0{,}55$$

5- l'écart interquartile

Pour calculer l'écart interquartile, il est nécessaire de calculer les quartiles Q1, et Q3

3N/4		Q3
N/2	75%	Me = Q2
N/4	50%	Q1
0	25%	

$$\begin{cases} Q_1 \equiv \frac{N}{4} \equiv \frac{220}{4} \equiv 55 \rightarrow Q_1 \epsilon [1{,}6 - 2{,}1[\\ Q_3 \equiv \frac{3N}{4} \equiv \frac{3 \times 220}{4} \equiv 165 \rightarrow Q_3 \epsilon [2{,}1 - 2{,}6[\end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{n_0}\left(\frac{N}{4} - F \uparrow\right) \Rightarrow Q_1 = 1{,}6 + \frac{0{,}5}{75}(55 - 40) = 1{,}667 \\ Q_3 = l_1 + \frac{l_2 - l_1}{n_0}\left(\frac{3N}{4} - F \uparrow\right) \Rightarrow Q_3 = 2{,}1 + \frac{0{,}5}{60}(165 - 115) = 2{,}517 \end{cases}$$

$$IQ = Q_3 - Q_1 = 2{,}517 - 1{,}667 = 0{,}85$$

Exercice 2 :

Soit x une variable statistique, on définit une nouvelle variable statistique z tel que :

$$z = ax + b, \qquad a\,, b \; sont \; des \; constantes$$

Montrer que :

$$\bar{z} \overset{?}{\equiv} a\bar{x} + b$$

$$z = ax + b \Rightarrow \bar{z} = \sum \frac{ax_i + b}{N} = a \sum \frac{x_i}{N} + \sum \frac{b}{N} = a\bar{x} + b$$

$V(x+b) \overset{?}{\triangleq} V(x)$

$$V(x+b) = \frac{\sum (x_i+b)^2}{N} - \overline{x+b}^2 = \frac{\sum x_i{}^2 + 2x_i b + b^2}{N} - (\bar{x}+b)^2$$

$$= \frac{\sum x_i{}^2}{N} + 2b\frac{\sum x_i}{N} + \frac{\sum b^2}{N} - (\bar{x}^2 + 2b\bar{x} + b^2)$$

$$= \frac{\sum x_i{}^2}{N} + 2b\bar{x} + b^2 - (\bar{x}^2 + 2b\bar{x} + b^2) = \frac{\sum x_i{}^2}{N} - \bar{x}^2 = V(x)$$

$$V(x+b) = \frac{\sum [(x_i+b) - \overline{x+b}]^{\ 2}}{N} = \frac{\sum [(x_i+b) - \bar{x} - b]^{\ 2}}{N} = \frac{\sum (x_i + \bar{x})^2}{N}$$

$V(ax) \overset{?}{\triangleq} a^2 V(x)$

$$V(ax) = \frac{\sum (ax_i)^2}{N} - \overline{ax}^2 = a^2\left(\frac{\sum x_i{}^2}{N} - \bar{x}^2\right) = a^2 V(x)$$

$$V(ax) = \frac{\sum (ax_i - \overline{ax})^2}{N} = \frac{\sum (ax_i - a\bar{x})^2}{N} = a^2\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = a^2 V(x)$$

Montrer que :

$V(x) = \sum \frac{n_i (x_i - a)^2}{N} - (\bar{x} - a)^2$ *a* est une constante

On pose –*a* = *b* . voir *V(x+b)*

Exercice 3 :

X est une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle [0,1], muni de la fonction de densité de probabilité définie par $f(x) = 3x^2$

1. $P(X = 0{,}5) = P(0{,}5 \le X \le 0{,}5) = \int_{0,5}^{0,5} 3x^2\, dx = 0$

2. $P(X \le 0{,}5) = P(0 \le X \le 0{,}5) = \int_{0}^{0,5} 3x^2\, dx = x^3|_0^{0,5} = 0{,}5^3 = 0{,}125$

3. $P(X > 0{,}5) = 1 - P(X \le 0{,}5) = 1 - 0.125 = 0{,}875$

4. $P(0{,}3 \le X \le 0{,}5) = \int_{0,3}^{0,5} 3x^2\, dx = x^3|_{0,3}^{0,5} = 0{,}5^3 - 0{,}3^3 = 0{,}098$

5. $P_{(0,2 \le X \le 0,5)}(0{,}3 \le X \le 0{,}9) = \frac{P(X \in [0,3-0,9] \cap [0,2-0,5])}{P(X \in [0,2-0,5])}$

$$= \frac{P(0{,}3 \le X \le 0{,}5)}{P(0{,}2 \le X \le 0{,}5)} = \frac{\int_{0,3}^{0,5} 3x^2\, dx}{\int_{0,2}^{0,5} 3x^2\, dx} = \frac{0{,}098}{0{,}117} = 0{,}838$$