HYDRODYNAMIQUE

- Exercice 1 :

De l'eau s'écoule dans une conduite de 30,0 cm de diamètre à la vitesse de 0,50 m.s^{-1}. Calculer le débit volumique en m^3.s^{-1} et L/min ; donner la valeur numérique du débit massique.

Solution :

a.- Débit volumique :

$$Q = AV = \frac{\pi d^2}{4} V = \frac{\pi (0{,}3)^2}{4} 0{,}5 = 0{,}035 m^3/s = 0{,}035.60 = 2{,}12 l/\min$$

b.- Débit massique :

$$Q_m = \rho_w Q = 10^3 .0{,}035 = 35 Kg/s$$

- Exercice 2 :

Dans une conduite de 30,0 cm de diamètre, l'eau circule avec un débit de 1800 L/min. Calculer la vitesse moyenne d'écoulement.

Solution :

Uniformisation des unités :

- d = 30 cm = 0,3 m
- Q = 1800 l/min = 0,03 m^3/s

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4.0{,}03}{\pi (0{,}3)^2} = 0{,}42 m/s$$

- Exercice 3 :

Soit une conduite **lisse** rectiligne de diamètre d = 12 mm dans laquelle circule un fluide de viscosité υ = 25 x 10-6 m^2/s avec un débit de 0,4 L/s .

1.- Déterminer de quel type de régime d'écoulement il s'agit .

2.- Calculer la perte de charge unitaire (par mètre de longueur de la conduite) .

Solution :

Uniformisation des unités :

- d = 12 mm = 0,012 m = 12 x 10^{-3} m
- Q = 0,4 l/s = 4 x 10^{-4} m^3/s

1.- Régime d'écoulement :

Pour déterminer le régime d'écoulement il suffit de calculer le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{Vd}{\upsilon}$$

Calculons la vitesse d'écoulement :

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4x4x10^{-4}}{\pi (0{,}012)^2} = 3{,}54 m/s$$

et donc : $R_e = \dfrac{3{,}54 x 0{,}012}{25 x 10^{-6}} = 1698$

$R_e < 2000$ → Le régime d'écoulement est donc **laminaire**

2.- Calcul de la perte de charge unitaire :

on sait que : $h_r = \lambda \dfrac{L}{d} \dfrac{V^2}{2g}$

La perte de charge unitaire est exprimée par unité de longueur de la conduite :

$$\frac{h_r}{L} = \frac{\lambda}{d} \frac{V^2}{2g}$$

et comme le régime est laminaire : $\lambda = \frac{64}{R_e} = 0{,}038$

d'où : $\frac{h_r}{L} = \frac{0{,}038}{0{,}012}\frac{3{,}54^2}{2x9{,}814} = 2m/m$

- Exercice 4 :

Même exercice que l'exercice 3 mais avec un débit de 4 L/s et un diamètre de 120 mm .

Solution :

1.- Régime d'écoulement :

Calculons la vitesse d'écoulement :

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4x4x10^{-3}}{\pi(0{,}12)^2} = 3{,}54m/s$$

et donc : $R_e = \frac{3{,}54x0{,}12}{25x10^{-6}} = 16985$

$R_e > 2000$ → Le régime d'écoulement est donc **turbulent**

2.- Calcul de la perte de charge unitaire :

Comme le régime est turbulent et que la conduite est lisse , on peut utiliser la formule de Colebrook-White pour le cas d'un régime turbulent **hydrauliquement lisse** influencé seulement par la viscosité donc le nombre de Reynolds :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2Log\left(\frac{R_e\sqrt{\lambda}}{2{,}51}\right)$$

cette expression , implicite , ne peut donc être résolue directement . On procède alors par approximations successives :

cette méthode consiste à choisir une valeur quelconque pour λ , l'introduire dans la partie droite de l'expression de Colebrook – White et de calculer la valeur de λ de la partie gauche .

la valeur trouvée est ensuite introduite à son tour dans le même calcul et ainsi de suite .

Le calcul est terminé quand 2 valeurs successives de **λ** se rapprochent l'une de l'autre , c'est-à-dire que la **méthode de calcul aura convergé vers une valeur fixe de λ .**

- 1ère Approximation : Essayons **λ = 0,04**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2Log\left(\frac{16985\sqrt{0{,}04}}{2{,}51}\right) = 0{,}0255$$

- 2ème Approximation : **λ = 0,0255**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2Log\left(\frac{16985\sqrt{0{,}0255}}{2{,}51}\right) = 0{,}0272$$

- 3ème Approximation : **λ = 0,0272**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2Log\left(\frac{16985\sqrt{0{,}0272}}{2{,}51}\right) = 0{,}0269$$

- 4ème Approximation : **λ = 0,0269**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2Log\left(\frac{16985\sqrt{0{,}0269}}{2{,}51}\right) = 0{,}0269$$

On voit bien que les calculs convergent vers la valeur finale : $\lambda = 0{,}0269$

d'où : $\frac{h_r}{L} = \frac{0,0269}{0,12} \frac{3,54^2}{2x9,814} = 0,14 m/m = 14 cm/m$

<u>*Remarque*</u> : Refaisons les calculs avec la formule de Blasius :

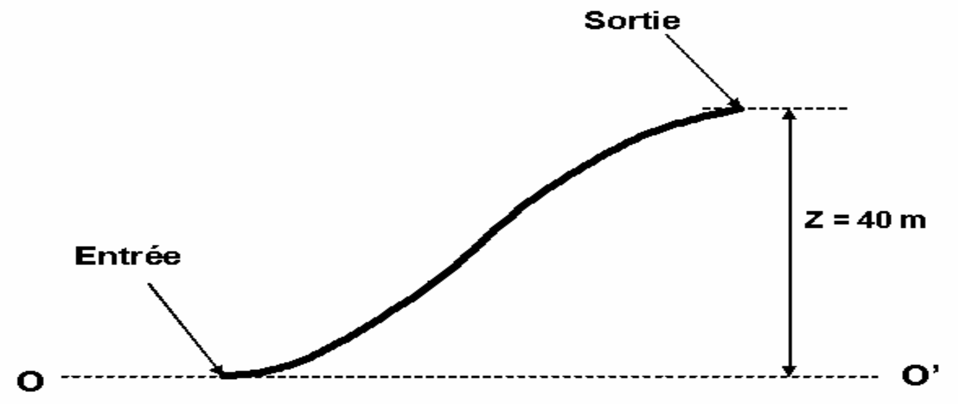
$$\lambda = \frac{0,316}{R_e^{0,25}} = \frac{0,316}{16985^{0,25}} = 0,0277$$

d'où : $\frac{h_r}{L} = \frac{0,0277}{0,12} \frac{3,54^2}{2x9,814} = 0,15 m/m = 15 cm/m$

la formule de Blasius donne donc une valeur de h_r assez proche de celle donnée par la formule de Colebrook - White !!!

- <u>*Exercice 5*</u> :

Dans une conduite simple de section constante , on a mesuré les pressions dans les sections d'entrée et de sortie (voir schéma) :



<u>Entrée</u> : Pression P_1 = 5,4 x 10^5 P_a

<u>Sortie</u> : Pression P_2 = 1,2 x 10^5 P_a

On demande de calculer la perte de charge dans cette conduite .

<u>Solution</u> :

- Calcul de la perte de charge :

On applique l'équation de Bernoulli entre les sections d'entrée et de sortie par rapport au plan de référence OO' :

$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_\omega$ avec h_w = perte de charge dans la conduite

on peut noter :

- ***Section Entrée*** :
- *Z = 0*
- *P_1 = 5,4 x 10^5 Pa = 5,4 x 10^5 N/m^2*
- *V_1 = V*
- ***Section Sortie*** :
- *Z = 40 m*
- *P_2 = 1,2 x 10^5 Pa = 1,2 x 10^5 N/m^2*
- *V_2 = V*

D'où :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_\omega \Rightarrow h_\omega = (Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g}) - (Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g})$$

$$h_\omega = Z_1 - Z_2 + \frac{P_1 - P_2}{\rho g} + \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g}$$

Application numérique :

* $Z_1 - Z_2 = 0 - 40 = -40m$
* $\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = \frac{5{,}4 - 1{,}2}{10^3 x 9{,}814} x10^5 = 42{,}80m$
* $\frac{V_1^{\ 2} - V_2^{\ 2}}{2g} = 0$ (puisque la section de la conduite est constante)

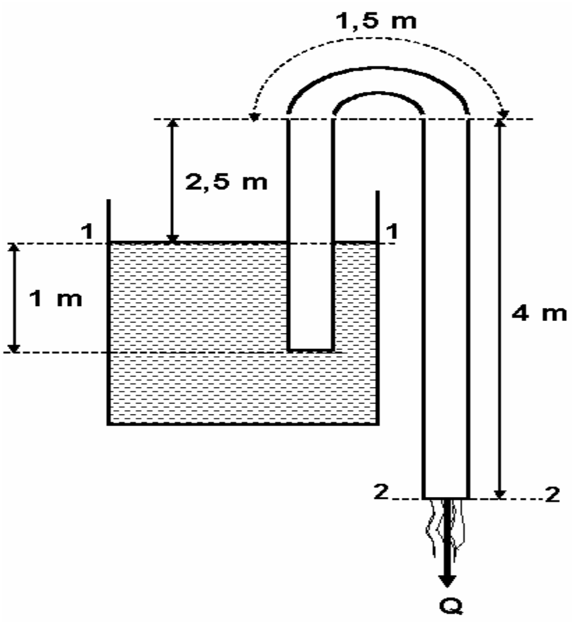
et donc : $h_\omega = 42{,}80 - 40 = 2{,}8m$

- *Exercice 6 :*

Le schéma ci-dessous représente un fluide (**v= 4,8 x 10^{-7} m^2/**s) aspiré par une conduite en forme de siphon à partir d'un réservoir à surface libre . La conduite utilisée a un diamètre de **25 mm** , une longueur totale de **9 m** et une rugosité relative **ε = 0,0004** .

On supposera , dans cet exercice , les pertes de charges singulières et la pression atmosphérique négligeables .

On demande de calculer le débit **Q** aspiré par la conduite



Solution :

1.- Calcul du débit :

Equation de Bernoulli entre les sections 1-1 et 2-2 par rapport à 2-2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^{\ 2}}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^{\ 2}}{2g} + h_\omega$$

avec : - $Z_1 = 4 - 2{,}5 = 1{,}5$ m ; $P_1 = P_{atm} = 0$; $V_1 = 0$

- $Z_2 = 0$; $P_2 = P_{atm} = 0$; $V_2 = V$

ce qui donne :

$$Z_1 = \frac{V^2}{2g} + h_\omega = \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{L}{d}\frac{V^2}{2g} = \left(1 + \lambda \frac{L}{d}\right)\frac{V^2}{2g} \Rightarrow V = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{L}{d}}}\sqrt{2gZ_1}$$

<u>Calcul de λ</u> (Formule de Colebrook-White avec approximations successives) :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2Log\left(\frac{k}{3{,}71d} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right) = -2Log\left(\frac{\varepsilon}{3{,}71} + \frac{2{,}51}{R_e\sqrt{\lambda}}\right)$$

1.- Test 1:

$\lambda = 0{,}015 \Rightarrow V = 2{,}14m/s \Rightarrow R_e = 111687 \Rightarrow \lambda = 0{,}020$

2.- Test 2:

$\lambda = 0{,}020 \Rightarrow V = 1{,}89m/s \Rightarrow R_e = 98673 \Rightarrow \lambda = 0{,}020$

La valeur de λ converge donc vers ***<u>λ = 0,020</u>*** → ***<u>V = 1,89 m/s</u>***

Et donc :

$$Q = AV = \pi\frac{d^2}{4}V = 0{,}0009m^3/s = 0{,}9L/s \qquad \rightarrow\ Q = 0{,}9L/s$$

- Exercice 7 :

Une conduite circulaire, reliée à un réservoir à niveau constant (voir schéma), comprend une portion BC de diamètre constant $\mathbf{D_1 = 200\ mm}$ et se termine par une portion se rétrécissant jusqu'à atteindre au point D un diamètre $\mathbf{D_2 = 150\ mm}$. Les pressions aux points A, C et D sont : $\mathbf{P_A = P_D = P_{atm} = 1{,}01\ bar}$ et $\mathbf{P_C = 1{,}5\ bar}$. Les côtes des points A, B, C et D par rapport à un plan de référence OO' sont $\mathbf{Z_A = 363m}$, $\mathbf{Z_B = 361m}$ et $\mathbf{Z_C = Z_D = 353m}$. La masse spécifique du fluide est $\mathbf{\rho = 10^3\ Kg/m^3}$ et sa viscosité cinématique $\mathbf{\nu = 1{,}01 \times 10^{-6}\ m^2/s}$.

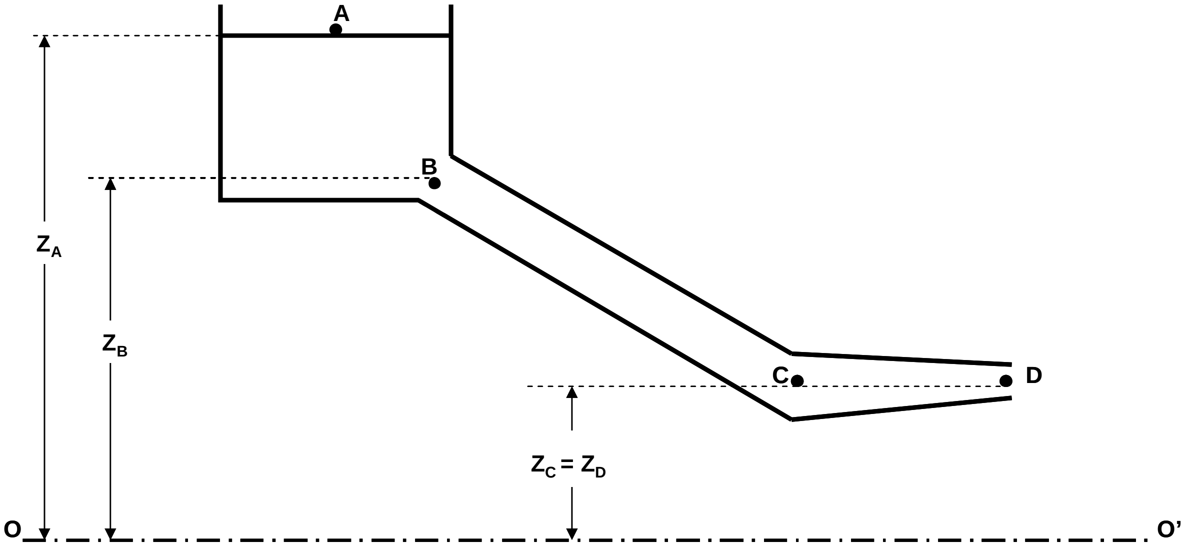
1.- Calculer la vitesse $\mathbf{V_C}$ au point C en considérant le cas d'un fluide **parfait incompressible**.

2.- En déduire :

a.- Les vitesses $\mathbf{V_B}$ et $\mathbf{V_D}$ aux points B et D

b.- Le débit volumique **Q** dans la conduite

3.- Calculer le nombre de Reynolds $\mathbf{R_e}$ de l'écoulement et en déduire la nature du régime d'écoulement dans la conduite BC.



Solution :

1.- Calcul de la vitesse V_c au point C :

Application de l'équation de Bernoulli entre les sections A et C par rapport à l'axe OO' pris comme référence :

Section A : $Z_A = 363m$, $P_A = P_{atm} = 1{,}01bar = 1{,}01x10^5\,N/m^2$, $V_A = 0$ (niveau constant)

Section C : $Z_C = 353m$, $P_C = 1{,}5bar = 1{,}5x10^5\,N/m^2$, $V_C = ?$

Equation de Bernoulli :

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_C + \frac{P_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g} + h_\omega$$

avec $\mathbf{h_w = 0}$ (fluide incompressible : pas de pertes de charge !) , d'où :

$$Z_A + \frac{P_A}{\rho g} + \frac{V_A^2}{2g} = Z_C + \frac{P_C}{\rho g} + \frac{V_C^2}{2g} \Rightarrow \frac{V_C^2}{2g} = Z_A - Z_C + \frac{P_A - P_C}{\rho g}$$

Et donc : $$V_C = \sqrt{\left(Z_A - Z_C + \frac{P_A - P_C}{\rho g} \right) 2g}$$

A.N : $$V_C = \sqrt{\left(363 - 353 + \frac{(1{,}01 - 1{,}5)x10^5}{10^3 x9{,}814} \right) x2x9{,}814} = 9{,}9 m/s \approx 10 m/s$$

2.-Vitesses V_B et V_D aux points B et D :

L'équation de continuité permet d'écrire :

$$Q = A_B V_B = A_C V_C = A_D V_D$$

- Comme $A_B = A_C$, ona : $V_B = V_C = 10 m/s$
- $A_C V_C = A_D V_D \Rightarrow V_D = \frac{A_C}{A_D} V_C = \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_C = \left(\frac{200}{150} \right)^2 x10 = 17{,}78\, m/s$
- ***Calcul du débit d'écoulement Q :***

$$Q = A_C V_C = \frac{\pi D_1^2}{4} V_D = \frac{3{,}14x(0{,}2)^2}{4} x10 = 0{,}314 m^3/s = 314 L/s$$

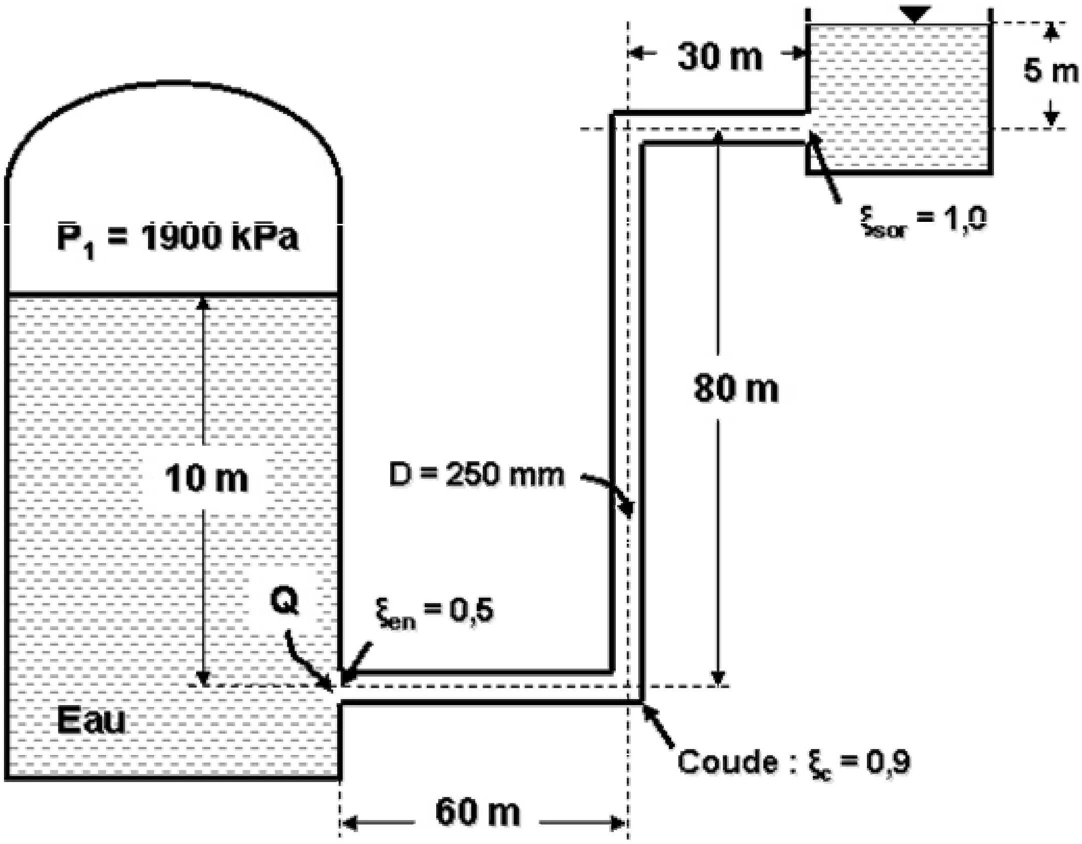
3.- Régime d'écoulement :

Calcul du Nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{V\, D}{\upsilon}$$ et pour la conduite BC : $$R_e = \frac{V_C D_1}{\upsilon}$$

A.N : $$R_e = \frac{10x0{,}2}{1{,}01x10^{-6}} = 1{,}98x10^6$$ ***Re > 4000 : Régime Turbulent !***

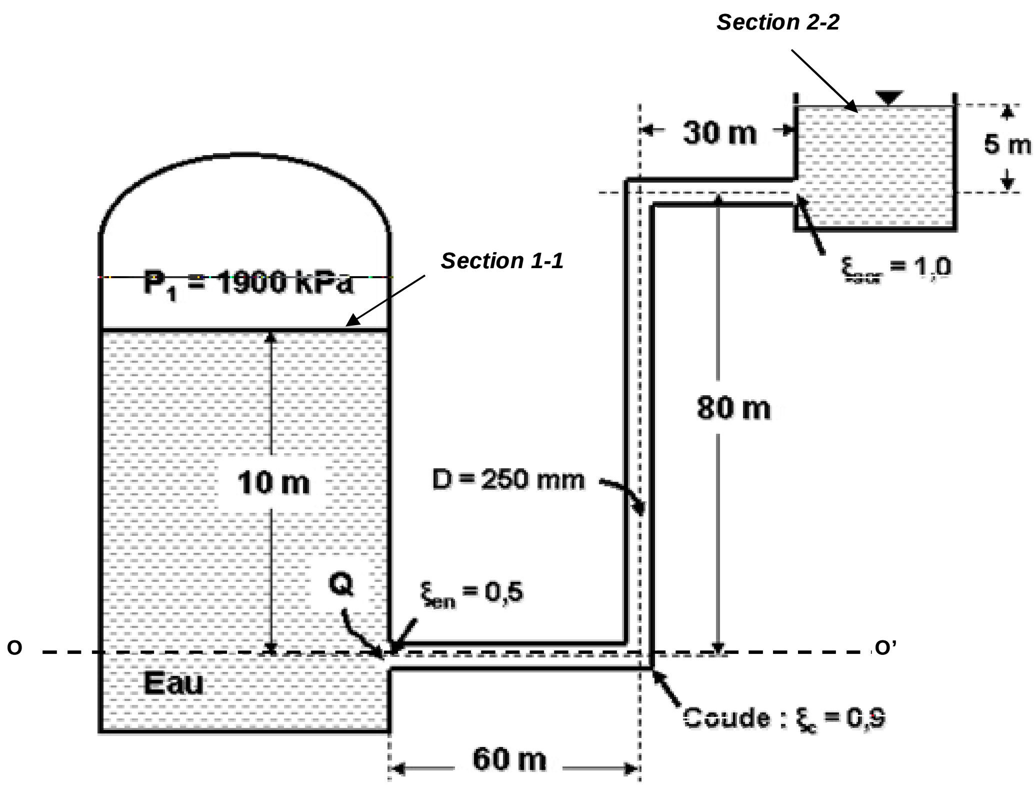
- *Exercice 8 :*
Le schéma ci-dessous montre une réservoir d'eau (viscosité cinématique **ν = 1,13 x 10^{-6} m^2/s**), dans lequel règne une pression **P_1** , relié à un autre réservoir à l'air libre par une conduite de diamètre constant **D** et de rugosité **k = 1 mm** . Toutes les autres indications sont montrées sur le schéma . On négligera la pression atmosphérique ainsi que les vitesses d'écoulement dans les réservoirs .



1.- *Déterminer la vitesse **V** dans la conduite en supposant que le régime d'écoulement est de type **turbulent - hydrauliquement rugueux** .*
2.- *En déduire le débit d'écoulement **Q** à la sortie de la conduite .*
3.- *Prouver alors qu'il s'agit bien d'un **régime turbulent** .*

Solution :

1.-Calcul de la vitesse V d'écoulement dans la conduite :



Application de l'équation de Bernoulli entre les sections 1-1 et 2-2 par rapport à un axe de référence O-O' (voir schéma ci dessus) :

Section 1-1 :
$$Z_1 = 10m$$
$$P_1 = P_1 = 1900kPa = 1900kN/m^2 = 1900x10^3 N/m^2$$
$$V_1 = 0 \text{ (niveau constant)}$$

Section 2-2 :
$$Z_2 = 5 + 80 = 85m$$
$$P_2 = P_{atm} \approx 0$$
$$V_2 = 0 \text{ (niveau constant)}$$

Et donc :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho_\omega g} + \frac{V_1^{\ 2}}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho_\omega g} + \frac{V_2^{\ 2}}{2g} + h_\omega$$

Avec : $h_\omega = h_r + h_s$

$$h_s = h_{en} + 2h_c + h_{sor} = (\zeta_{en} + 2\zeta_c + \zeta_{sor})\frac{V^2}{2g}$$

$$h_s = (0{,}5 + 2x0{,}9 + 1{,}0)x\frac{V^2}{2g} \Rightarrow h_s = 3{,}3\frac{V^2}{2g}$$

$$h_r = \lambda\frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} \quad ; \mathrm{L} = 60 + 80 + 30 = 170\mathrm{m}$$

- ***Calcul de λ :***

Formule de Colebrook :
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2Log\left(\frac{k}{3{,}71D} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right)$$

Comme le régime est supposé turbulent '' hydrauliquement rugueux '' : **R_e = f(k)** , et donc :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2Log\left(\frac{k}{3{,}71D}\right) = 2Log\left(\frac{3{,}71D}{k}\right)$$

Et donc :
$$\lambda = \left[\frac{1}{2Log\left(\frac{3{,}71D}{k}\right)}\right]^2$$
A.N :
$$\lambda = \left[\frac{1}{2Log\left(\frac{3{,}71x250}{1}\right)}\right]^2 = 0{,}0284$$

D'où : $$h_r = \lambda \frac{L}{D}\frac{V^2}{2g} = 0,0284x\frac{170}{0,25}x\frac{V^2}{2g} = 19,3\frac{V^2}{2g}$$

Et finalement : $$h_\omega = h_r + h_s = (3,3+19,3)\frac{V^2}{2g} = 22,6\frac{V^2}{2g}$$

Revenons à l'équation de Bernoulli :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} = Z_2 + h_\omega = Z_2 + \left(\zeta_{en} + 2\zeta_c + \zeta_{en} + \lambda \frac{L}{D}\right)\frac{V^2}{2g}$$

A.N : $$\frac{V^2}{2g} = \frac{Z_1 - Z_2 + \frac{P_1}{\rho g}}{\zeta_{en} + 2\zeta_c + \zeta_{en} + \lambda \frac{L}{D}}$$ ***A.N :*** $$\frac{V^2}{2g} = \frac{10 - 85 + \frac{1900x10^3}{10^3x9,814}}{22,6} = 5,25m$$

Et donc : $$V = \sqrt{5,25x2x9,814} = 10,15m/s$$

2.- *En déduire le débit d'écoulement* ***Q*** *à la sortie de la conduite .*

On a : $Q = AV = \frac{\pi D^2}{4}V = \frac{3,14x(0,25)^2}{4}x10,15 = 0,498m^3/s = 498L/s$

3.- *Prouver alors qu'il s'agit bien d'un* ***régime turbulent*** *.*

On calcule le nombre de Reynolds :

$$R_e = \frac{V\ D}{\upsilon} = \frac{10,15x0,25}{1,13x10^{-6}} \approx 2,25x10^6$$

Re > 4000 : Régime Turbulent !