

HYDRAULIQUE GENERALE (Mecanique des fluides)

TRONC COMMUN 3^{ème} ANNEE

Partie 1 : Statique des Fluides (Hydrostatique)

Partie 2 : Dynamique des Fluides (Hydrodynamique)

Par : Sellam Fouad

PLAN DU COURS

I.- INTRODUCTION

I.1.- Le Système d'Unités SI

I.2.- Les Propriétés des Fluides

I.2.1.- Les Densités

- a.- Densité de masse ou " Masse Volumique " :
- b.- Poids Spécifique :
- c.- Densité Relative :

I.2.2.- Les Viscosités

- a.- La Viscosité Dynamique
- b.- La Viscosité Cinématique

II.- STATIQUE DES FLUIDES : HYDROSTATIQUE

II.1.- Notion de Pression

II.2.- Loi de Pascal

II.3.- Equation Fondamentale de l'Hydrostatique

II.4.- Dispositifs de mesure de la pression

II.5.- Forces de Pression des Fluides sur les Surfaces

II.2.1.- Cas des Forces de Pression exercées par les Fluides sur des Surfaces Planes

- a.- Expression générale de la Force de Pression
- b.- Position du point d'application de la Force de Pression :
- c.- Cas d'une surface verticale – Diagramme des pressions :

II.2.2.- Cas des Forces de Pression exercées par les Fluides sur des Surfaces Courbes

- a.- Expression générale de la Force de Pression
- b.- Position du point d'application de la Force de Pression :

III.- DYNAMIQUE DES FLUIDES : ECOULEMENT DANS LES CONDUITES EN CHARGE

III.1.- Les Principes de Base

III.1.1.- Principe de Conservation de Masse ou Equation de Continuité

III.1.2.- Equation Générale d'Écoulement ou Equation de **Bernoulli**

- a.- Cas des Fluides Parfaits (non visqueux)
- b.- Cas des Fluides réels (visqueux)

III.1.3.- Les Régimes d'Écoulement : Le Nombre de **Reynolds**

III.2.- Les Pertes de Charge

III.2.1.- Les Pertes de Charge Linéaires ou Réparties

- a.- Notion de Rugosité des Conduites
- b.- Perte de charge en régime laminaire :
- c.- Perte de charge en régime turbulent :
 - c.1.- Formule de **Colebrook – White** :
 - c.2.- Formule de **Blasius** (1911) :
 - c.3.- Diagramme de **Moody** :
 - c.4.- Formule de **Chézy** :

III.2.2.- Les Pertes de Charge Locales ou Singulières

- a.- Expression Générale d'une Perte de Charge Singulière
- b.- Cas d'un élargissement brusque de la section d'écoulement :
- c.- Cas d'un rétrécissement brusque de la section d'écoulement :
- d.- Autres pertes de charge singulières :

III.3.- Applications Particulières de l'Equation Générale d'Écoulement

III.3.1.- Cas d'un Écoulement à travers un Orifice : Formule de Torricelli

III.3.2.- Cas d'un Écoulement à travers un tube de Venturi

III.4.- Branchements de Conduites

III.4.1.- Conduite à Section Constante (Conduite simple)

a.- Sortie à l'air libre

b.- Sortie immergée :

III.4.2.- Conduites à Section variable (Conduites multiples)

a.- Branchement en Série

b- Branchement en Parallèle :

c.- Conduite assurant un service de route :

d.- Branchement Mixte (Série et Parallèle) :

I.- INTRODUCTION

I.1.- Le Système d'Unités SI

En mécanique des fluides, le système d'unités SI (" **Système International** ") comporte 3 unités primaires à partir desquelles toutes les autres quantités peuvent être décrites :

| Grandeur de Base | Nom de L'Unité | Symbole | Dimension |
|------------------|----------------|-----------|-----------|
| Longueur | Mètre | <i>m</i> | <i>L</i> |
| Masse | Kilogramme | <i>kg</i> | <i>M</i> |
| Temps | Seconde | <i>s</i> | <i>T</i> |

Le tableau suivant résume les unités **SI** des différentes caractéristiques utilisées en mécanique des fluides :

| Caractéristique | Unité SI | Dimension |
|------------------|---|--------------------------------------|
| Vitesse | <i>m/s</i> , <i>m.s⁻¹</i> | <i>LT⁻¹</i> |
| Accélération | <i>m/s²</i> , <i>m.s⁻²</i> | <i>LT⁻²</i> |
| Force | <i>Kg.m/s²</i> , <i>N (Newton)</i> , <i>kg.m.s⁻²</i> | <i>MLT⁻²</i> |
| Energie | <i>Kg.m².s⁻²</i> , <i>N.m</i> , <i>J (Joule)</i> , <i>kg.m².s⁻²</i> | <i>ML²T⁻²</i> |
| Puissance | <i>Kg.m²/s³</i> , <i>N.m/s</i> , <i>W (Watt)</i> , <i>kg.m².s⁻³</i> | <i>ML²T⁻³</i> |
| Pression | <i>Kg/m.s²</i> , <i>N/m²</i> , <i>Pa (Pascal)</i> , <i>kg.m⁻¹.s⁻²</i> | <i>ML⁻¹T⁻²</i> |
| Masse Spécifique | <i>Kg/m³</i> , <i>kg.m⁻³</i> | <i>ML⁻³</i> |
| Poids Spécifique | <i>Kg/m².s⁻²</i> , <i>N/m³</i> , <i>kg.m⁻².s⁻²</i> | <i>ML⁻²T⁻²</i> |
| Viscosité | <i>Kg/m.s</i> , <i>N.s/m²</i> , <i>kg.m⁻¹.s⁻¹</i> | <i>ML⁻¹T⁻¹</i> |

I.2.- Les Propriétés des Fluides

I.2.1.- Les Densités

La Densité d'une substance est la quantité de matière contenue dans une unité de volume de cette substance . Elle peut être exprimée de différentes manières :

a.- Densité de masse ou " *Masse Volumique* " :
$$\rho = \frac{M}{V} \quad \text{Unités : kg/m}^3 \quad \text{Dimensions : ML}^{-3}$$

Valeurs Particulières :

- Eau : $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$
- Mercure : $\rho_{Hg} = 13546 \text{ kg/m}^3$

b.- Poids Spécifique :
$$\gamma = \frac{W}{V} = \frac{Mg}{V} \Rightarrow \gamma = \rho g \quad \text{Unités : N/m}^3 \quad \text{Dimensions : ML}^{-2}\text{T}^{-2}$$

Valeurs Particulières :

- Eau : $\gamma_w = 9814 \text{ N/m}^3$
- Mercure : $\gamma_{Hg} = 132943 \text{ N/m}^3$

c.- Densité Relative :

Elle représente la masse spécifique d'une substance exprimée par rapport à celle d'une substance de référence :

L'eau :
$$D = \frac{\rho}{\rho_w} \quad \text{Unité : Adimensionnel (sans unité)}$$

Valeurs Particulières :

- Eau : $D_w = 1$
- Mercure : $D_{Hg} = 13,6$

I.2.2.- Les Viscosités

La viscosité μ est une propriété d'un fluide due à la cohésion et à l'interaction entre les molécules qui présentent une résistance aux déformations .

Tous les fluides sont visqueux et obéissent à la loi de viscosité établie par Newton :

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad \text{avec } \tau : \text{Contrainte de déformation tangentielle}$$

$\frac{du}{dy}$: Gradient de vitesse d'écoulement

μ : Viscosité dynamique

Ils sont donc appelés " **Fluides Newtoniens** "

a.- La Viscosité Dynamique

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \Rightarrow \mu = \frac{\tau}{\frac{du}{dy}} = \frac{\text{Force}}{\text{Surface}} \Big/ \frac{\text{Vitesse}}{\text{Distance}} = \frac{\text{Force} \times \text{Temps}}{\text{Surface}} = N.s.m^{-2} = kg.m^{-1}.s^{-1}$$

Remarque : μ est généralement exprimée en Poise (Po) : 10 Po = 1 kg.m⁻¹.s⁻¹

Valeurs Particulières :

- Eau : $\mu = 1,14 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.s^{-1}$
- Mercure : $\mu = 1,552 \text{ kg.m}^{-1}.s^{-1}$

b.- La Viscosité Cinématique

Elle représente le rapport entre la viscosité dynamique et la masse spécifique d'un fluide :

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad \text{Unité : m}^2/\text{s} \quad \text{Dimension : L}^2\text{T}^{-1}$$

Remarque : ν est généralement exprimée en Stokes (St) : 10⁴ St = 1 m².s⁻¹

Valeurs Particulières :

- Eau : $\nu = 1,14 \times 10^{-6} \text{ m}^2.s^{-1}$
- Mercure : $\nu = 1,145 \times 10^{-4} \text{ m}^2.s^{-1}$

La viscosité des fluides dépend en grande partie de sa température . Le tableau suivant donne quelques valeurs des viscosités cinématiques de l'eau en fonction de la température :

| Température , °C | Viscosité cinématique ν , m ² /s (x 10 ⁻⁶) |
|------------------|--|
| 0 | 1,790 |
| 5 | 1,520 |
| 10 | 1,310 |
| 15 | 1,140 |
| 20 | 1,010 |
| 25 | 0,897 |
| 30 | 0,804 |
| 35 | 0,724 |
| 40 | 0,661 |
| 50 | 0,556 |
| 60 | 0,477 |
| 100 | 0,296 |

II.- STATIQUE DES FLUIDES : HYDROSTATIQUE

II.1.- Notion de Pression

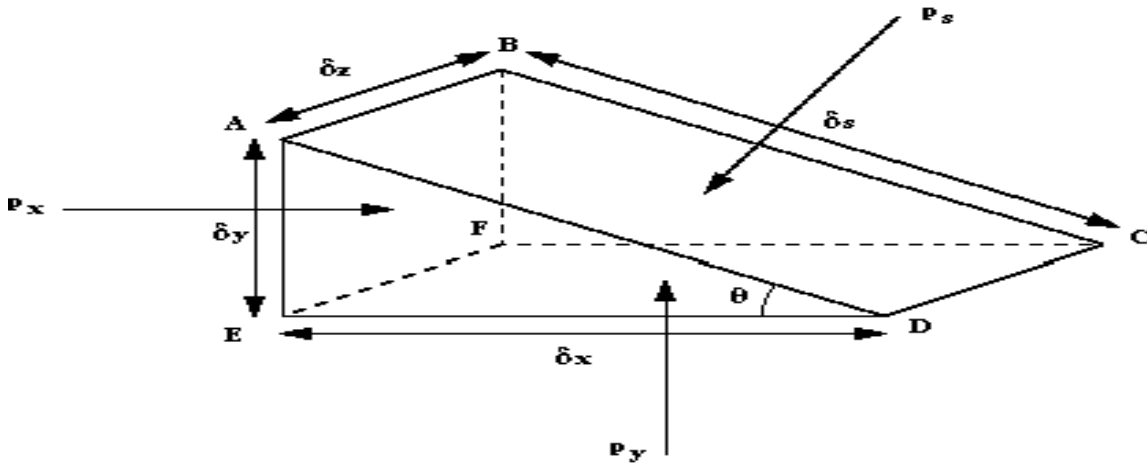
La pression est définie comme la force exercée par un fluide par unité de surface :

$$P = \frac{F}{S} \quad \text{Unité : N/m}^2 \text{ ou kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2} \quad \text{Dimension : ML}^{-1}\text{T}^{-2}$$

Remarque : La pression peut aussi s'exprimer en :

- Pascal (Pa) : 1 Pa = 1 N/m²
- Bar (Bar) : 1 Bar = 10⁵ N/m²

II.2.- Loi de Pascal



Considérons un élément d'un fluide ABCDEF (prisme triangulaire) et soient P_x , P_y et P_s les pressions dans les 3 directions x , y et s .

Etablissons la relation entre P_x , P_y et P_s :

- Selon la direction x :

• Force due à P_x : $F_{xx} = P_x \cdot (ABFE) = P_x \cdot dydz$

• Force due à P_y : $F_{yx} = 0$

• Composante due à P_s : $F_{sx} = -P_s \cdot (ABCD \cdot \sin \theta) = -P_s \cdot dsdz \frac{dy}{ds}$ car $\sin \theta = \frac{dy}{ds}$

donc : $F_{sx} = -P_s \cdot dydz$

et puisque le fluide est en équilibre : $F_{xx} + F_{yx} + F_{sx} = 0$

d'où : $P_x \cdot dydz - P_s \cdot dydz = 0 \rightarrow \boxed{P_x = P_s}$

- Selon la direction y :

• Force due à P_y : $F_{yy} = P_y \cdot (DCFE) = P_y \cdot dx dz$

• Force due à P_x : $F_{xy} = 0$

• Composante due à P_s : $F_{sy} = -P_s \cdot (ABCD \cdot \cos \theta) = -P_s \cdot dsdz \frac{dx}{ds}$ car $\cos \theta = \frac{dx}{ds}$

donc : $F_{sy} = -P_s \cdot dx dz$

et puisque le fluide est en équilibre : $F_{yy} + F_{xy} + F_{sy} = 0$

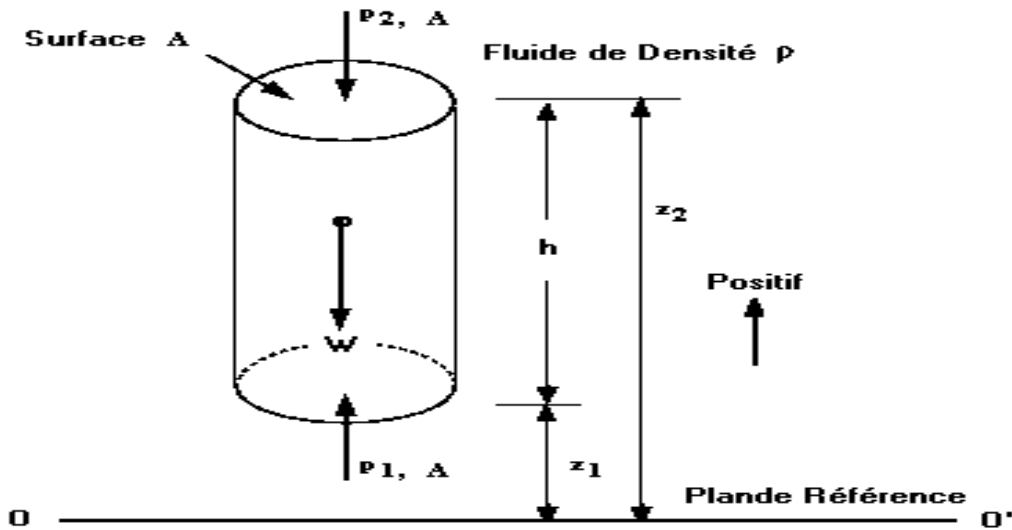
d'où : $P_y \cdot dx dz - P_s \cdot dx dz = 0 \rightarrow \boxed{P_y = P_s}$

et finalement : $\boxed{P_x = P_y = P_s}$

Conclusion

Loi de Pascal : " La pression d'un fluide en un point est la même dans toutes les directions "

II.3.- Equation Fondamentale de l'Hydrostatique



Soit un élément de fluide de masse spécifique ρ représentant une colonne verticale de section transversale constante A . Considérons 2 sections situées à des distances Z_1 et Z_2 par rapport à un plan de référence OO' . Soient P_1 et P_2 les pressions dans ces 2 sections.

- Exprimons la variation de pression $P_1 - P_2$:

Le fluide étant en équilibre, la somme des forces dans la direction verticale est donc égale à Zéro :

- Force due à P_1 : $F_1 = P_1 \cdot A$
- Force due à P_2 : $F_2 = P_2 \cdot A$
- Force due au poids de la colonne du liquide : $W = mg = \rho g V = \rho g A (Z_2 - Z_1)$
avec $V =$ Volume de l'élément considéré $= \rho g \cdot A \cdot (Z_2 - Z_1)$

Si l'on considère le sens positif vers le haut, la condition d'équilibre s'écrit donc :

$$F_1 - F_2 - W = 0 \Rightarrow P_1 A - P_2 A - \rho g A (Z_2 - Z_1) = 0$$

et donc :
$$P_1 - P_2 = \rho g (Z_2 - Z_1)$$

Remarques :

1.- Loi de la statique des fluides

$$P_1 - P_2 = \rho g (Z_2 - Z_1) \Rightarrow P_1 + \rho g Z_1 = P_2 + \rho g Z_2 \Rightarrow \frac{P_1}{\rho g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho g} + Z_2$$

et donc :
$$Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste}$$
 : Loi de la statique des fluides

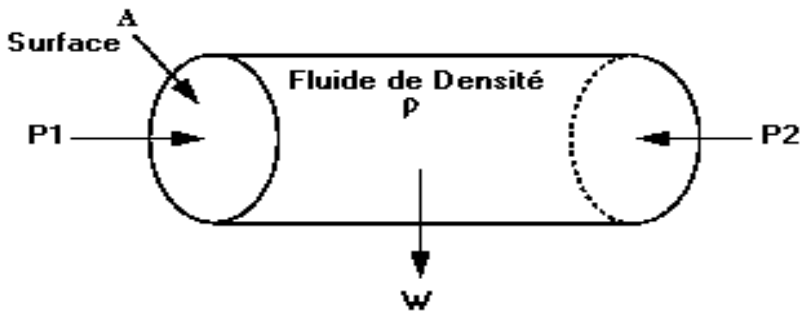
2.- En posant $Z_2 - Z_1 = h$ et $P_2 = P_0$, On aura :

- $$P_1 = P_0 + \rho g h$$
- Et si $P_0 = 0$: $P_1 = \rho g h$

Conclusion

La pression augmente donc linéairement en fonction de la profondeur

3.- Egalité des pressions sur un même plan horizontal :

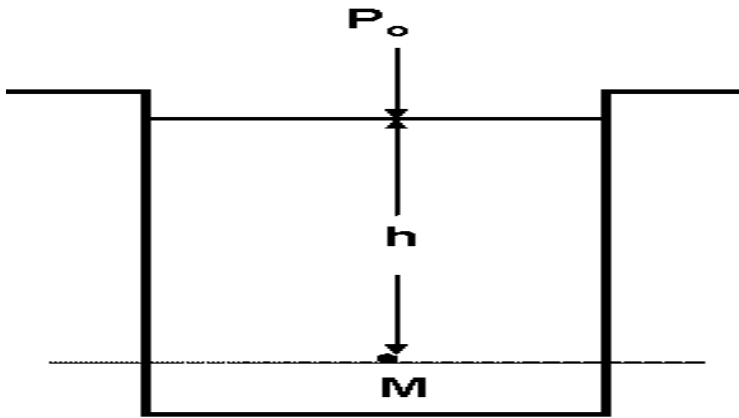


Si l'on considère la direction horizontale , on aura :

$$P_1 A - P_2 A + 0 = 0 \Rightarrow P_1 = P_2 \quad (\text{car la composante du poids } W \text{ selon l'horizontale est nulle})$$

Conclusion : Sur un même plan horizontal , toutes les pressions sont égales (Pressions Isobares)

4.- Pression effective et Pression absolue :



Au point M , la pression est égale à :

$$P_M = P_o + \rho g h$$

A la surface libre du fluide , la pression est généralement représentée par la pression atmosphérique P_{atm} , d'où :

$$P_M = P_{atm} + \rho g h \quad : \text{ Pression Absolue}$$

Et si l'on néglige l'influence de la pression atmosphérique ($P_{atm} = 0$) :

$$P_M = \rho g h \quad : \text{ Pression Effective}$$

5.- Charge piézométrique , hauteur piézométrique :

On a vu que : $Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste}$ avec :

- $Z[L]$: hauteur de position ou côte géométrique
- $\frac{P}{\rho g}[L]$: Hauteur piézométrique
- $Z + \frac{P}{\rho g}[L]$: Hauteur ou charge totale

6.- Notion de hauteur du vide :

Dans certains cas , la pression absolue est inférieure à la pression atmosphérique :

$$P_M = P_{atm} + \rho g h < P_{atm}$$

Il se crée alors une dépression dont la hauteur correspondante , appelée " **Hauteur du Vide** " , est égale à :

$$h_{vide} = \frac{P_{atm} - P_{abs}}{\rho g}$$

7.- Signification énergétique de l'équation de la statique des fluides :

On a vu que : $Z + \frac{P}{\rho g} = C^{ste} = E_p$

Si l'on multiplie les 2 termes de cette équation par le poids élémentaire mg , on aura :

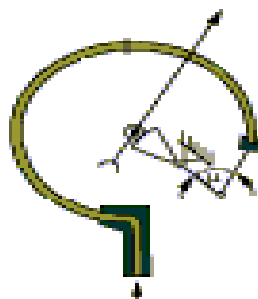
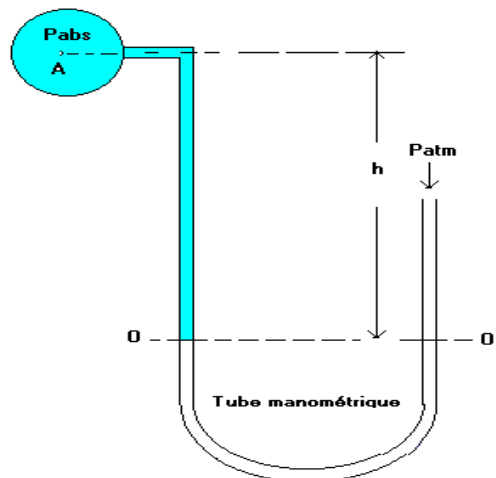
$$mgZ + mg \frac{P}{\rho g} = mgE_p \quad \text{avec :}$$

- $mgZ[Nm]$: Energie potentielle de position
- $mg \frac{P}{\rho g} [Nm]$: Energie potentielle de pression
- $mgE_p [Nm]$: Energie potentielle totale

II.4.- Dispositifs de mesure de la pression

Le dispositif utilisé dépend de l'importance des pressions à mesurer . Il existe 2 types de dispositifs de mesure des pressions :

- Les tubes manométriques : utilisés pour la mesure de pressions relativement faibles (... en laboratoires)
- Les manomètres mécaniques : utilisés pour la mesure de pressions relativement plus élevées (1 à 2 Kg/cm²)

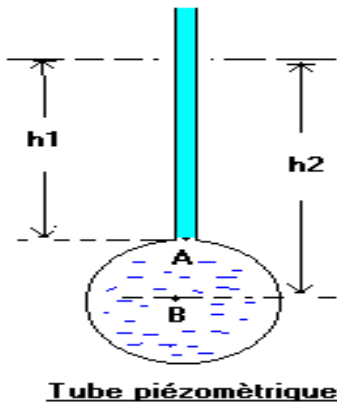


Pression effective

Manomètre mécanique

- Mesure des pressions par les tubes manométriques :

1.- Le tube manométrique simple ou piézomètre :



- $P_A = \rho g h_1$
- $P_B = \rho g h_2$

Remarque :

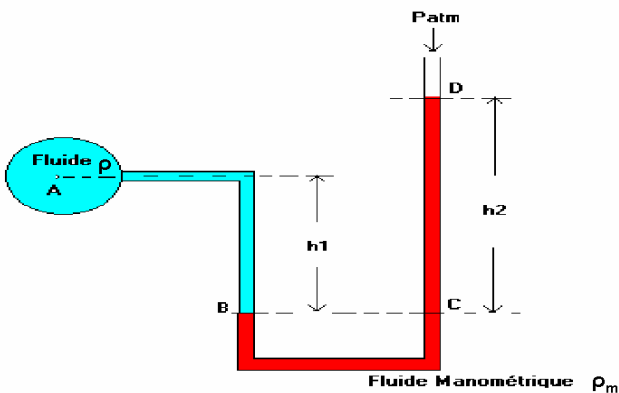
- P_A et P_B sont appelées " Pressions Manométriques "
- h_1 et h_2 sont appelées " Hauteurs Manométriques "

C'est un dispositif utilisé uniquement pour la mesure des pressions des Liquides et non les gaz

b.- Le tube manométrique en forme de " U " :

Il s'agit d'un dispositif utilisé pour la mesure des pressions dans les liquides et les gaz .

MANOMÈTRE EN U



On a : $P_B = P_C$

- Partie Gauche : $P_B = P_A + \rho g h_1$
- Partie Droite : $P_C = P_D + \rho_m g h_2 = P_{atm} + \rho_m g h_2$

Puisque l'on mesure une pression manométrique , on soustrait donc P_{atm} : → $P_C = \rho_m g h_2$

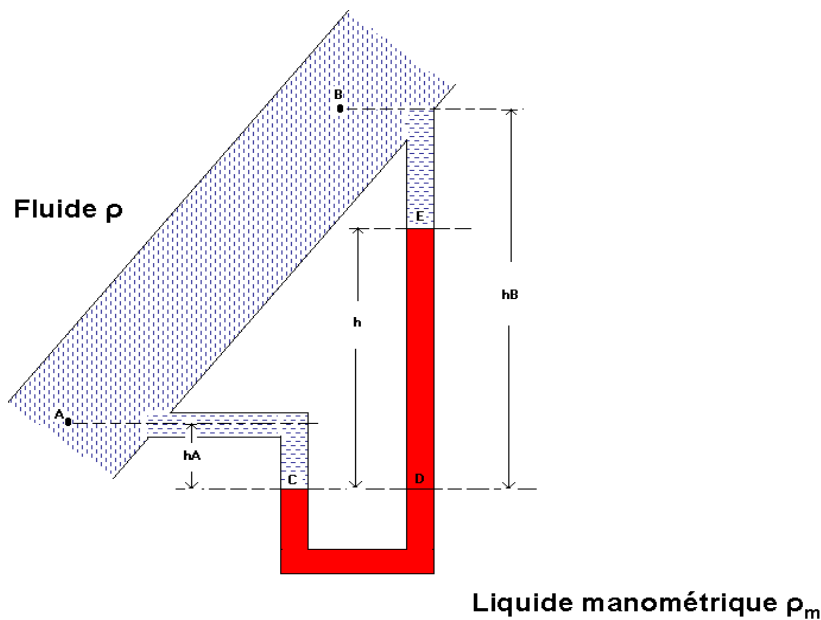
et comme $P_B = P_C \Rightarrow P_A + \rho g h_1 = \rho_m g h_2 \Rightarrow P_A = \rho_m g h_2 - \rho g h_1$

Remarque :

- Si le fluide de densité ρ est un gaz , sa densité est négligeable devant celle du liquide manométrique :

$$\rho \ll \rho_m \Rightarrow P_A = \rho_m g h_2$$

2.- Mesure de la différence de pression par un manomètre en U :



Problème : Calcul de la différence de pression $P_A - P_B$:

On sait que : $P_C = P_D$

- Branche de Gauche : $P_C = P_A + \rho g h_A$
- Branche de Droite : $P_D = P_B + \rho g (h_B - h) + \rho_m g h$

et comme $P_C = P_D \Rightarrow P_A + \rho g h_A + P_B + \rho g (h_B - h) + \rho_m g h \Rightarrow P_A - P_B = \rho g (h_B - h_A) + (\rho_m - \rho) g h$

et si le fluide est un gaz ($\rho_m \gg \rho$) : $P_A - P_B = \rho_m g h$

3.- Manomètre à Eau et manomètre à Mercure :

Les manomètres à eau sont utilisés pour mesurer des pressions relativement faibles car leur utilisation pour les fortes pressions conduirait à l'élaboration de tubes de dimensions trop exagérées. C'est pour cela, et compte tenu de sa densité élevée, que l'on préfère utiliser du Mercure comme liquide manométrique .

Illustration :

Quelle serait la hauteur manométrique donnée pour mesurer une pression $P = 120 \text{ KN/m}^2$:

- a.- Dans le cas d'un manomètre à eau
- b.- Dans le cas d'un manomètre à Mercure

* Cas de l'Eau :

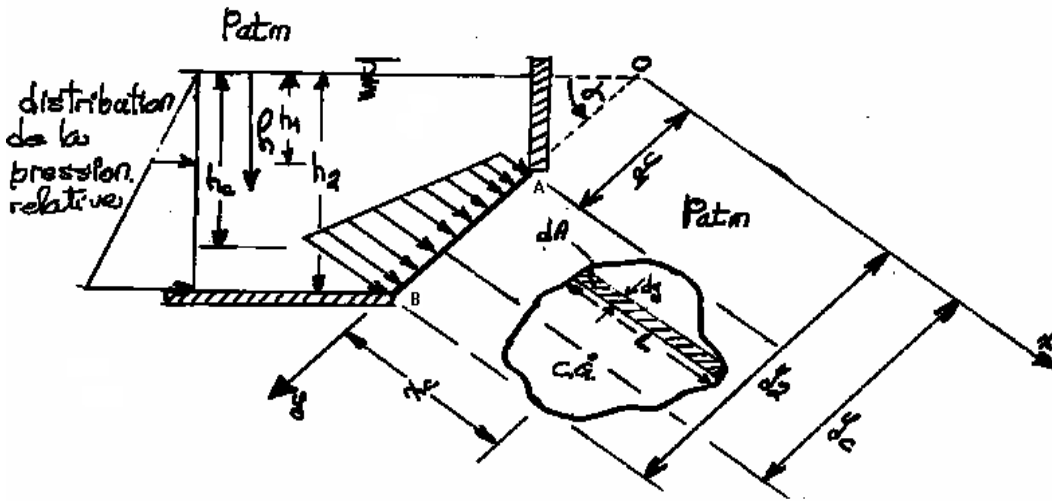
$$P = \rho_w g h \Rightarrow h = \frac{P}{\rho_w g} = \frac{120 \cdot 10^3}{9,814 \cdot 10^3} = 12,23 \text{ m!}$$

* Cas du Mercure :

$$P = \rho_{Hg} g h \Rightarrow h = \frac{P}{\rho_{Hg} g} = \frac{120 \cdot 10^3}{9,814 \cdot 13546} = 0,9 \text{ m!}$$

II.5.- Forces de Pression des Fluides sur les Surfaces

FORCES SUR UNE SURFACE PLANE INCLINÉE.



SCHEMA DESCRIPTIF.

Soit une surface plane AB inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale et immergée dans un fluide de densité massique ρ et C son centre de gravité .

Etablissons l'expression de la force Résultante F des forces exercées par le fluide sur la surface AB (voir diagramme des forces exercées) : Considérons pour cela la force élémentaire dF s'exerçant sur une surface élémentaire dA :

$$dF = PdA = (P_{atm} + \rho gh) dA = P_{atm} dA + \rho gh dA$$

La force résultante F est égale à l'intégrale de dF sur toute la surface AB :

$$F = \int_A dA = \int_A P_{atm} dA + \int_A \rho gh dA$$

or , $h = y \sin \alpha$ d'ou :

$$F = P_{atm} A + \int_A \rho g y \sin \alpha dA = P_{atm} A + \rho g \sin \alpha \int_A y dA =$$

Le terme $\int_A y dA$ représente le " **Moment Statique** " de la surface AB par rapport

à Ox : $\int_A y dA = y_c A$ avec y_c : Ordonnée du centre de gravité de la surface AB .

L'expression de F devient : $F = P_{atm} A + \rho g \sin \alpha y_c A$

et comme $y_c \sin \alpha = h_c$: Profondeur du centre de gravité de la surface AB :

$$F = P_{atm} A + \rho g h_c A$$

En général , la pression P_{atm} est négligée et donc l'expression finale de F devient :

| | | |
|--------------------|---|----------------------|
| $F = \rho g h_c A$ | Remarque : En hydrostatique , $\rho = \rho_w$ (Eau) : | $F = \rho_w g h_c A$ |
|--------------------|---|----------------------|

b.- Position du point d'application de la Force de Pression :

Déterminons h_D , la profondeur du point d'application de la force résultante F :

Pour cela , utilisons le principe des moments :

$$M_o F = \sum_{AB} M_i$$

avec :

$$M_o F = F \cdot y_D \quad \text{et} \quad \sum_{AB} M_i = \int_{AB} y dF = \int_{AB} y \cdot \rho g y \sin \alpha dA = \int_{AB} \rho g y^2 \sin \alpha dA = \rho g \sin \alpha \int_{AB} y^2 dA$$

le terme $\int_{AB} y^2 dA$ représente le " **Moment d'Inertie** " de la surface AB par rapport à l'axe

$$Ox = I_{ox}$$

On aura donc : $\rho g \sin \alpha y_D A = \rho g \sin \alpha I_{ox}$

Et donc :

$$y_D = \frac{I_{ox}}{y_c A}$$

Remarque : Utilisation du théorème de Huygens :

Ce théorème nous permet d'écrire que : $I_{ox} = I_{cc} + y_c^2 A$ avec :

I_{cc} : Moment d'inertie de la surface AB par rapport à un axe passant par son centre de gravité C .

Dans ce cas , la formule précédente devient :

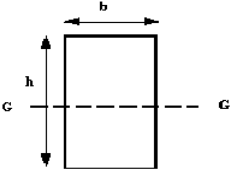
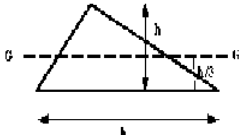
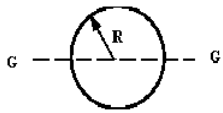
$$y_D = y_c + \frac{I_{cc}}{y_c A} \quad \text{ou bien} \quad h_D = h_c + \frac{I_{oo}}{h_c A'}$$

avec :

- A' : Projection verticale de la surface AB
- I_{oo} : Moment d'inertie de la surface A' par rapport à l'axe passant par son centre de gravité .

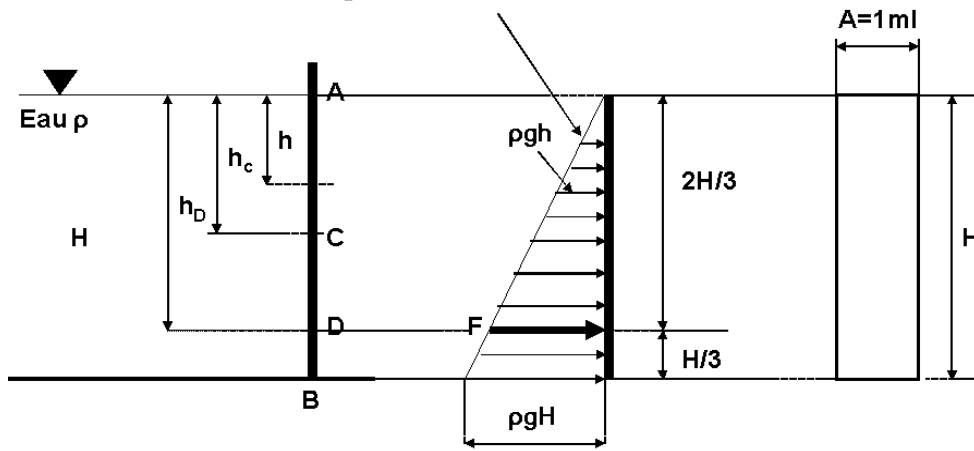
Conclusion : Le point d'application de la résultante F se trouve toujours **plus bas** que le centre de gravité d'une distance égale à : $\frac{I_{oo}}{h_c A'}$

Le tableau suivant résume les moments d'inertie de quelques surfaces particulières :

| Type | Surface | Moment d'Inertie I_{cc} |
|---|----------------|---------------------------|
| <p>Rectangle</p>  | bh | $\frac{bh^3}{12}$ |
| <p>Triangle</p>  | $\frac{bh}{2}$ | $\frac{bh^3}{36}$ |
| <p>Cercle</p>  | πR^2 | $\frac{\pi R^4}{4}$ |

c.- Cas d'une surface verticale - Diagramme des pressions :

Diagramme des Pressions



Cas d'une surface plane verticale

Soit une plaque AB plane verticale retenant une hauteur d'eau H . Le schéma représente le diagramme des pressions exercées sur la surface AB . Exprimons la résultante F des forces de pressions sur la surface AB de 2 façons différentes :

1.- D'après le diagramme des pressions :

Le diagramme des pressions est représenté par un triangle dont la surface est égale à la résultante des forces de pressions :

$$F = \frac{\rho g H \cdot H}{2} = \frac{1}{2} \rho g H^2 \quad \text{et } F \text{ passe par le centre de gravité du triangle , d'où : } h_D = \frac{2}{3} H$$

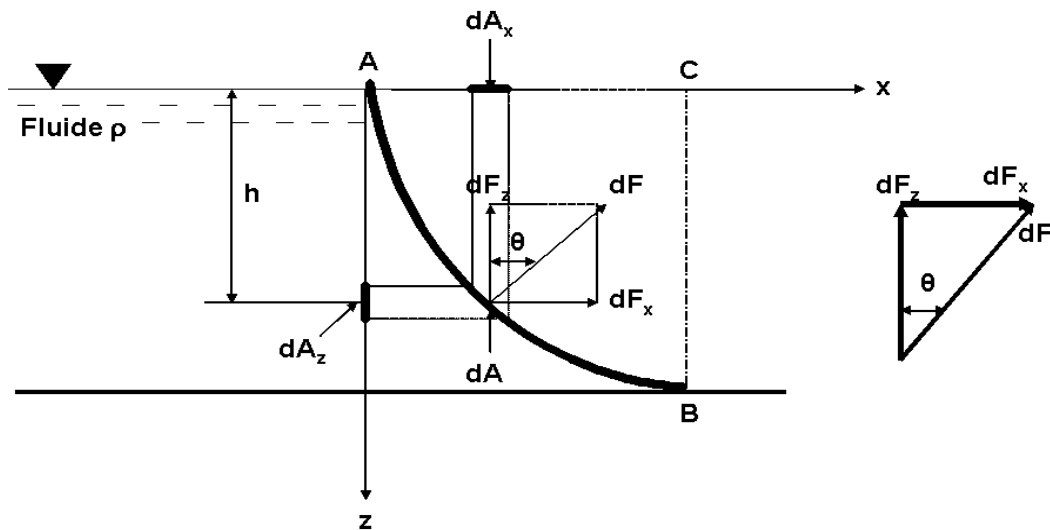
2.- D'après les formules de l'hydrostatique :

$$F = \rho g h_c A = \rho g \frac{H}{2} H \cdot 1ml = \frac{1}{2} \rho g H^2$$

$$\text{et : } h_D = h_c + \frac{I_{oo}}{h_c A} = \frac{H}{2} + \frac{1 \cdot H^3}{12 \frac{H}{2} H \cdot 1} = \frac{H}{2} + \frac{H}{6} = \frac{2}{3} H$$

II.2.2.- Cas des Forces de Pression exercées par les Fluides sur des Surfaces Courbes
a.- Expression générale de la Force de Pression

Force de Pression sur une surface Courbe



Soit une paroi courbe AB retenant un fluide de densité massique ρ .

Soit un élément dA de la surface AB situé à une profondeur h et sur lequel s'exerce une force élémentaire dF qui se décompose en 2 forces :

- Une force dF_x , agissant sur la surface dA_z projection de dA sur l'axe z .
- Une force dF_z , agissant sur la surface dA_x projection de dA sur l'axe x .

On sait que : $dF = \rho g h dA$ d'où :

$$dF_x = dF \cdot \sin \theta = \rho g h dA \sin \theta = \rho g h dA_z \quad \text{car } dA \sin \theta = dA_z$$

$$dF_z = dF \cdot \cos \theta = \rho g h dA \cos \theta = \rho g h dA_x \quad \text{car } dA \cos \theta = dA_x$$

d'où :

$$\int dF_x = F_H = \rho g \int_{A_z} h dA_z = \rho g h_c A_z \rightarrow \underline{F_H = \rho g h_c A_z}$$

avec : A_z : Projection verticale de la surface courbe AB.

CONCLUSION : Le calcul de la composante horizontale F_H est ramené au calcul d'une force de pression sur une surface plane verticale .

De même : $\int dF_z = F_v = \rho g \int_{A_x} h dA_x = \rho g \int_W dW = \rho g W \rightarrow \underline{F_v = \rho g W}$

Avec W : Volume délimité par :

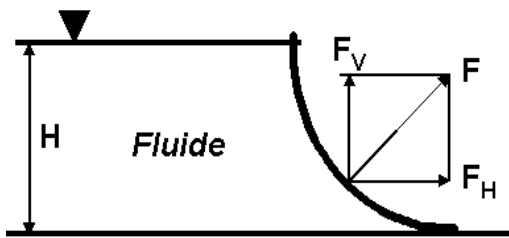
- La surface courbe AB
- La surface libre du fluide
- Les 2 verticales menées des 2 extrémités A et B de la surface .

CONCLUSION : Le calcul de la composante horizontale F_v se résume donc au calcul du **Poids du fluide** représenté par le volume déplacé par la surface AB .

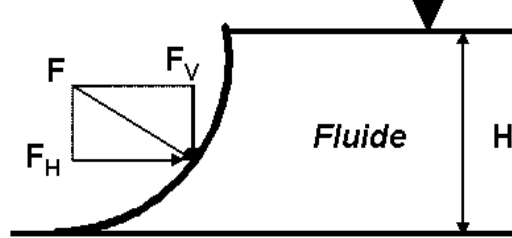
Le calcul des 2 composantes F_H et F_v permet ensuite de déterminer la résultante F par l'expression suivante :

$$F = \sqrt{F_H^2 + F_v^2}$$

Remarque : Selon que la surface AB en contact avec l'eau est concave ou convexe , on aura :



F_V dirigée vers le haut



F_V dirigée vers le bas

b.- Position du point d'application de la Force de Pression :

Le point d'application de la résultante F est obtenu si l'on connaît les composantes F_H et F_V .

Dans le cas général, il faudra établir l'équation de la courbe AB et celle du segment représentant la force F (équation d'une droite) en tenant compte que l'angle d'inclinaison de la force résultante F par rapport à l'horizontale est obtenu par la formule suivante :

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{F_v}{F_H}$$

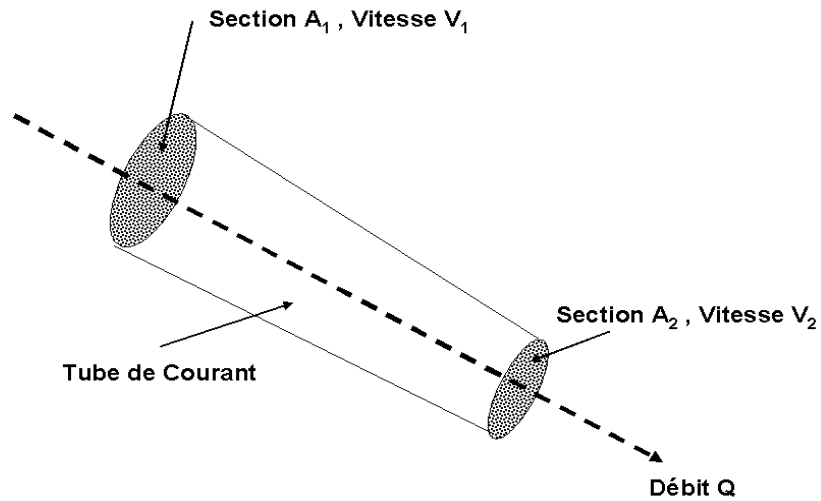
Fin de la Partie " Statique des Fluides - Hydrostatique "

III.- DYNAMIQUE DES FLUIDES : HYDRODYNAMIQUE

III.1.- Les Principes de Base

III.1.1.- Principe de Conservation de Masse ou Equation de Continuité

Le principe de continuité exprime la conservation de masse , ce qui signifie qu'aucun fluide ne peut être créé ni disparaître dans un volume donné :



Notion de débit d'écoulement :

Le débit d'écoulement s'exprime par les relations suivantes :

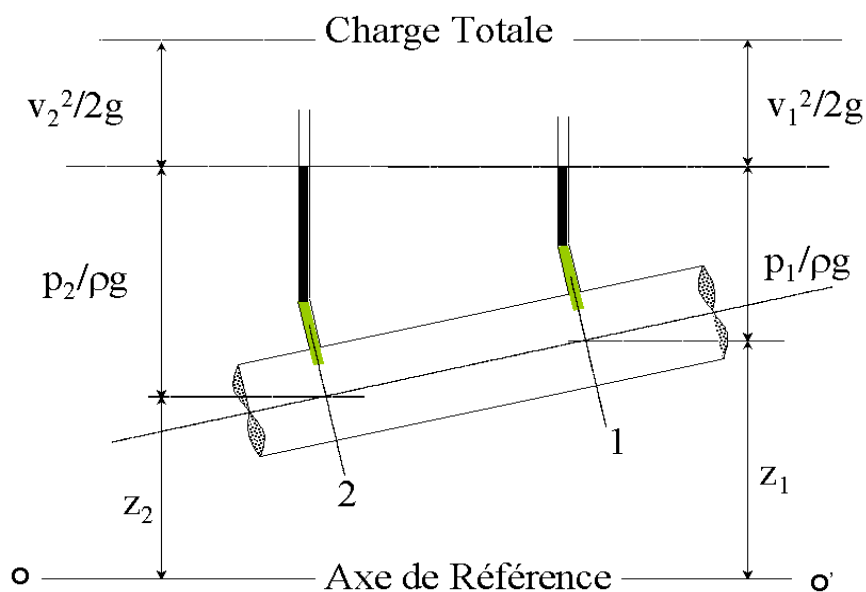
- $Q = AV$: Débit volumique (volume par unité de temps) , Unité SI = **m³/s**
- $Q_m = \rho Q$: Débit massique , Unité SI = **Kg/s**

Etant donné que le débit d'écoulement reste constant (mouvement permanent) , L'équation de continuité

s'écrit donc :
$$Q = A_1 V_1 = A_2 V_2 = C^{ste}$$

III.1.2.- Equation Générale d'Écoulement ou Equation de **Bernoulli**

a.- Cas des Fluides Parfaits (non visqueux)



L'équation de Bernoulli exprime que , tout le long d'un filet liquide en mouvement permanent , l'énergie totale par unité de poids du liquide reste constante ($dH/dx = 0$) . D'après le schéma , on peut donc écrire que :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} = H = C^{ste}$$

Cette équation s'écrit donc dans le cas général :

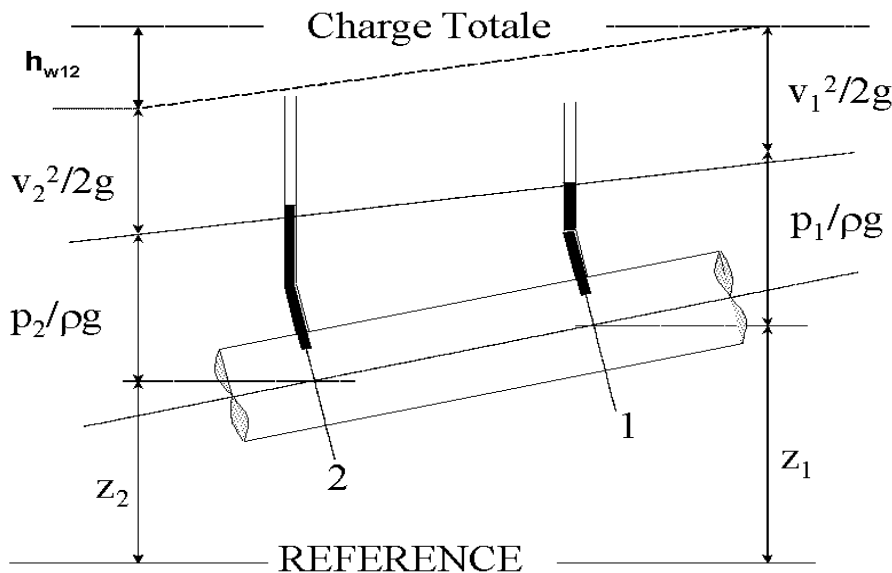
$$Z + \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = H = C^{ste} \quad : \text{Equation de Bernoulli pour un Fluide Parfait}$$

b.- Cas des Fluides réels (visqueux)

Contrairement au fluide parfait non visqueux , la charge H pour un fluide réel visqueux diminue dans la direction de l'écoulement ($dH/dx < 0$) .

Ceci est du à la nature visqueuse dy fluide qui dissipe une partie de l'énergie: cette perte d'énergie est appelée "**Perte de charge**" .

La représentation graphique en cas de fluide réel est donc montré par le schéma suivant :



L'équation de Bernoulli , pour un liquide réel , devient donc (voir schéma) :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_{w12} \quad : \text{Equation de Bernoulli pour un Fluide Réel}$$

avec : h_{w12} : **Perte de charge totale entre les sections 1 et 2** .

Selon l'origine des pertes de charge , on distingue :

- La perte de charge primaire ou "**répartie**" , noté h_r , qui est la conséquence de la **viscosité** du fluide et de la **rugosité** des parois de la section d'écoulement
- La perte de charge secondaire ou "**locale**" ou "**singulière**" , noté h_s , qui est la conséquence d'une modification brusque dans la nature physique de la section d'écoulement (élargissement, rétrécissement, changement de direction , etc...) .

La perte de charge totale est donc la somme des 2 pertes de charge répartie et singulière :

$$\underline{h_w = h_r + h_s}$$

III.1.3.- Les Régimes d'Écoulement : Le Nombre de **Reynolds**

Les écoulements sont classés en 2 régimes principaux :

- " **Laminaire** " et " **Turbulent** "
- séparés par une phase transitoire appelée " **régime critique** "

Pour caractériser ces régimes d'écoulement , on introduit un nombre adimensionnel , appelée " **Nombre de Reynolds** " , noté R_e et calculé par la formule :

$$R_e = \frac{VD}{\nu} = \frac{\rho VD}{\mu}$$

avec :

- V = Vitesse moyenne d'écoulement = Q/A
- D = Diamètre de la section d'écoulement (circulaire)
- ν = Viscosité cinématique du fluide = μ/ρ
- μ = viscosité dynamique du fluide

En introduisant l'expression du débit et de la section d'écoulement (circulaire) , le nombre de Reynolds s'écrit :

$$R_e = \frac{4Q}{\pi D \nu} = \frac{4 \rho Q}{\pi D \mu}$$

Les limites du Nombre de Reynolds définissant les différents régimes d'écoulement peuvent être résumées comme suit :

- $R_e \leq 2000$: Le régime est " **LAMINAIRE** "
- $2000 < R_e < 4000$: Le régime est " **CRITIQUE** " ou " **TRANSITOIRE** "
- $R_e \geq 4000$: Le régime est " **TURBULENT** "

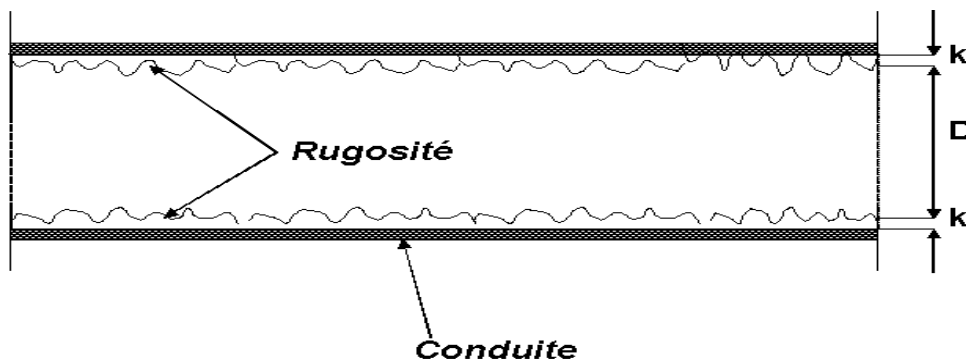
III.2.- Les Pertes de Charge

III.2.1.- Les Pertes de Charge Linéaires ou Réparties

a.- Notion de Rugosité des Conduites

Contrairement à une surface lisse , une surface rugueuse implique un état de surface dont les irrégularités ont une action directe sur les forces de *frottements* .

Une surface rugueuse peut être considérée comme étant constituée par une série de protubérances élémentaires caractérisées par une hauteur , notée k , et appelée " **Rugosité** " :



Afin de comparer la rugosité par rapport au diamètre de la conduite , on introduit le rapport :

$$\varepsilon = \frac{k}{D} \quad : \text{Rugosité Relative}$$

▪ Expression de la perte de charge due aux frottements :

La perte de charge linéaire est calculée par la formule de Darcy - Weisbach (1857) :

$$h_r = \lambda \frac{L V^2}{D 2g} \quad : \text{Formule de Darcy - Weisbach (1857)}$$

Avec :

- $L =$ Diamètre de la section d'écoulement (m)
- $L =$ Longueur de la conduite (m)
- $V =$ Vitesse d'écoulement (m/s)
- $\lambda =$ Coefficient de frottement (sans unité)

Plusieurs formules sont proposées pour le calcul de λ et dépendent du régime d'écoulement :

b.- Perte de charge en régime laminaire : $R_e < 2000 \Rightarrow \lambda = \frac{64}{R_e}$

c.- Perte de charge en régime turbulent : $R_e > 2000$

Plusieurs formules de calcul du coefficient λ sont proposés par différents auteurs :

c.1.- Formule de **Colebrook - White** :

Formule de Colebrook – White , 1938

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \text{Log} \left[\underbrace{\left(\frac{k}{3,71D} \right)}_{\text{Effet de la Rugosité de la conduite}} + \underbrace{\left(\frac{2,51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right)}_{\text{Effet de la Viscosité du fluide}} \right]$$

Cette formule montre que λ peut être influencée par :

1.- La Rugosité de la conduite à travers le terme k/D :

Dans ce cas [$\lambda = f(k/D)$], on parlera d'un " *Écoulement hydrauliquement Rugueux* " et la formule de Colebrook - White devient :

Formule de Colebrook – White , 1938
Régime Hydrauliquement Rugueux

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \text{Log} \left(\underbrace{\left(\frac{3,71 D}{k} \right)}_{\text{Effet de la Rugosité de la conduite}} \right)$$

2.- La Viscosité du fluide à travers le terme R_e :

Dans ce cas [$\lambda = f(R_e)$], on parlera d'un " *Écoulement hydrauliquement Lisse* " et la formule de Colebrook - White devient :

Formule de Colebrook – White , 1938
Régime Hydrauliquement Lisse

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \text{Log} \left(\underbrace{\left(\frac{R_e \sqrt{\lambda}}{2,51} \right)}_{\text{Effet de la Viscosité du fluide}} \right)$$

3.- La Rugosité de la conduite et la Viscosité du fluide en même temps :

Il s'agit dans ce cas d'un régime de transition ou l'on a : $\lambda = f(R_e ; k/D)$ ou l'on utilise la formule complète de Colebrook-White pour le calcul de λ .

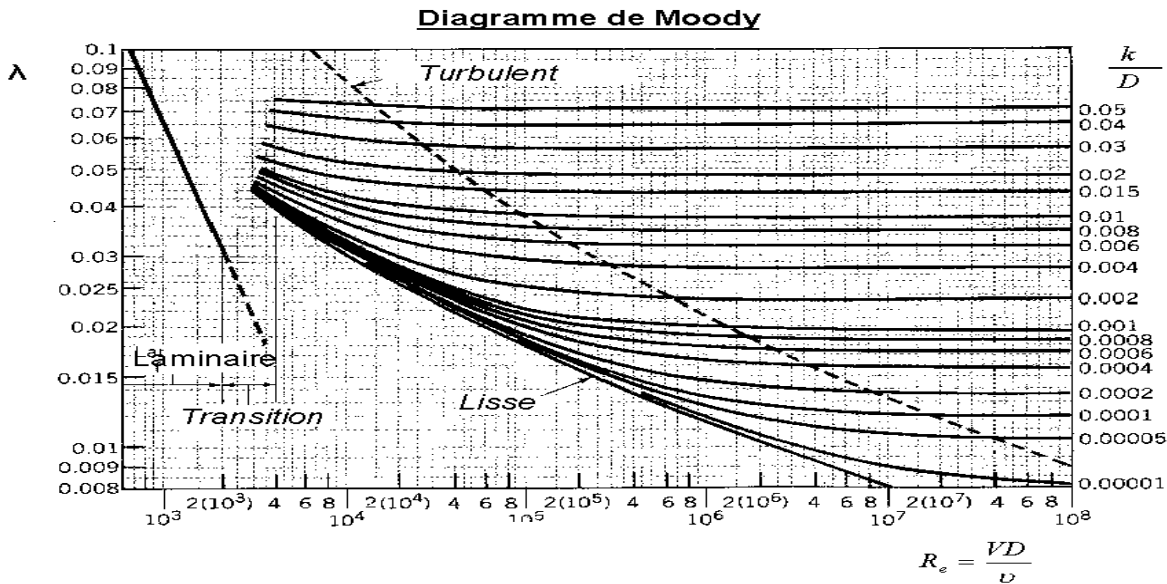
c.2.- Formule de **Blasius** (1911) :

$$\lambda = \frac{0,316}{R_e^{0,25}}$$

Cette une formule proposée pour : $Re < 10^5$:

c.3.- Diagramme de **Moody** :

Les travaux de Nikuradse sur les pertes de charge dans les conduites ont permis d'élaborer un graphique (Diagramme de Moody) permettant de déterminer le coefficient λ en fonction de R_e pour les différents types d'écoulement et des rugosités relatives k/D allant de $1/30$ à $1/1014$:



Le diagramme permet d'observer et d'identifier plusieurs régions :

- 1.- Zone à Ecoulement Laminaire : $R_e < 2000 \rightarrow \lambda = f(R_e)$
- 2.- Zone de transition : $2000 < R_e < 4000$
- 3.- Zone de Turbulence Lisse : $\lambda = f(R_e)$
- 4.- Zone de Turbulence Transitoire : $\lambda = f(R_e ; k/D)$
- 5.- Zone de Turbulence Rugueuse : $\lambda = f(k/D)$

c.4.- Formule de **Chézy** :

La formule de Chézy est inspirée de celle de Darcy-weisbach :
$$h_r = \lambda \frac{L V^2}{D 2g}$$

En introduisant la notion de " Rayon hydraulique " R égal au rapport entre la surface A et le périmètre

d'écoulement P :
$$R = \frac{A}{P} = \frac{\pi D^2}{4\pi D} = \frac{D}{4} \Rightarrow D = 4R$$

La formule de la perte de charge devient :
$$h_r = \lambda \frac{L V^2}{4R 2g} = \frac{\lambda}{8g} \frac{L}{R} V^2$$

et comme :
$$\frac{h_r}{L} = J$$
 : Pente hydraulique

$$J = \frac{\lambda}{8g} \frac{V^2}{R} \Rightarrow V^2 = \frac{8g}{\lambda} R J \Rightarrow V = \sqrt{R J} \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$$

En posant : $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$: Coefficient de Chézy , on obtient finalement :

$$V = C \sqrt{R J}$$

ou bien , en introduisant le Débit Q :
$$Q = AC \sqrt{R J}$$

De plus , Chézy propose la formule empirique suivante pour le calcul de C :

$$C = \frac{1}{k} R^{1/6} \quad \text{avec : } k = \text{rugosité de la conduite}$$

$$\text{ce qui donne : } Q = A \frac{1}{k} R^{1/6} R^{1/2} J^{1/2} = \frac{A}{k} R^{2/3} J^{1/2}$$

$$\text{et comme } A = \pi D^2/4 \quad \text{et } R = D/4 : Q = \frac{1}{k} \frac{\pi D^2}{4} \left(\frac{D}{4}\right)^{2/3} J^{1/2}$$

$$Q = \frac{\pi}{4^{5/3}} \frac{1}{k} D^{8/3} J^{1/2} = \frac{\pi}{4^{5/3}} \frac{1}{k} D^{8/3} \frac{h_r^{1/2}}{L^{1/2}}$$

$$\text{en posant : } K = \frac{\pi}{4^{5/3}} \frac{1}{k} D^{8/3} \quad : \text{Module de Débit (L/S)}$$

$$\text{on obtient : } Q = K \sqrt{\frac{h_r}{L}} \quad \text{et donc : } \boxed{h_r = \frac{Q^2}{K^2} L}$$

Remarque :

- Pour tenir compte des pertes singulières , on majore en général h_r de 10 %
- Pour tenir des variations de vitesse ,on introduit le coefficient de vitesse donné par des tables : $\beta=f(V)$

$$\text{Et la formule générale s'écrit donc : } \boxed{h_w = 1,1\beta \frac{Q^2}{K^2} L}$$

III.2.2.- Les Pertes de Charge Locales ou Singulières

a.- Expression Générale d'une Perte de Charge Singulière

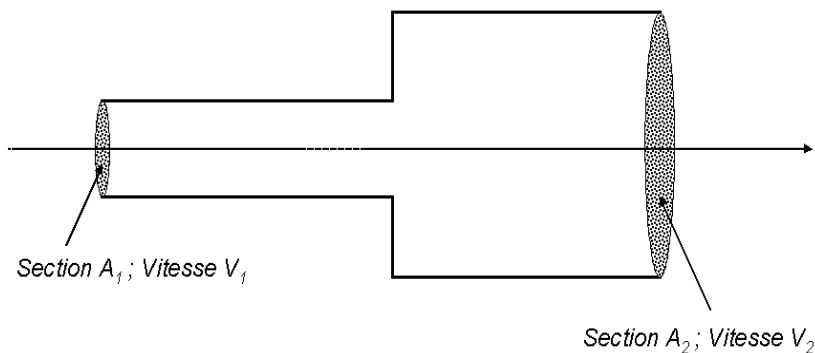
En plus de pertes de charge linéaires , la perte de charge singulière se produit localement au niveau d'une modification brusque de la nature physique de la section d'écoulement . Elle se calcule par la formule

$$\text{générale suivante : } \boxed{h_s = \zeta_s \frac{V^2}{2g}}$$

Avec : ζ_s = Coefficient qui dépend de la nature de la déformation

a.- Cas d'un élargissement brusque de la section d'écoulement :

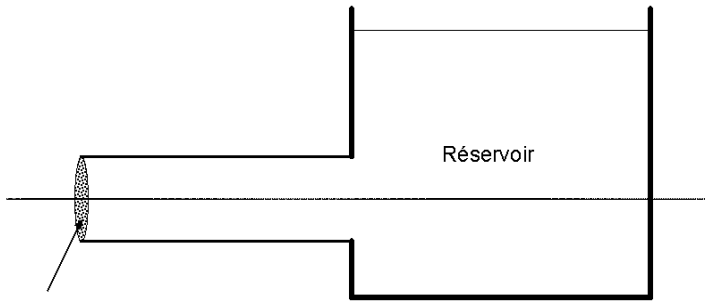
Élargissement brusque de la section



$$\text{Dans ce cas : } \zeta_{seb} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \Rightarrow h_{seb} = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

Remarque : Cas particulier d'une sortie vers un réservoir :

Sortie vers un réservoir



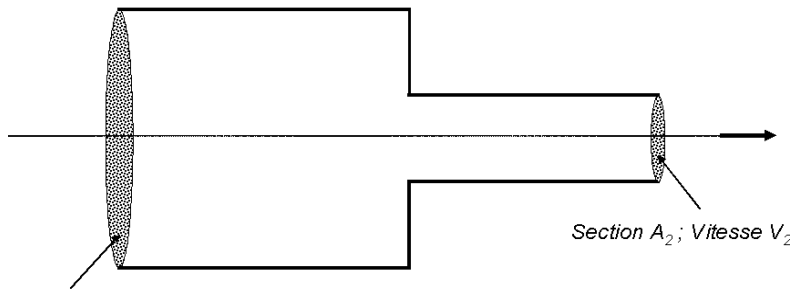
Section A ; Vitesse V

Dans ce cas , le terme $\frac{A_1}{A_2}$ tend vers zéro du fait que la section du réservoir est très grande devant celle de la

conduite , et la formule précédente devient : $\zeta_{sor} = 1 \Rightarrow h_{sor} = \frac{V^2}{2g}$

b.- Cas d'un rétrécissement brusque de la section d'écoulement :

Rétrécissement brusque de la section



Section A₁ ; Vitesse V₁

Section A₂ ; Vitesse V₂

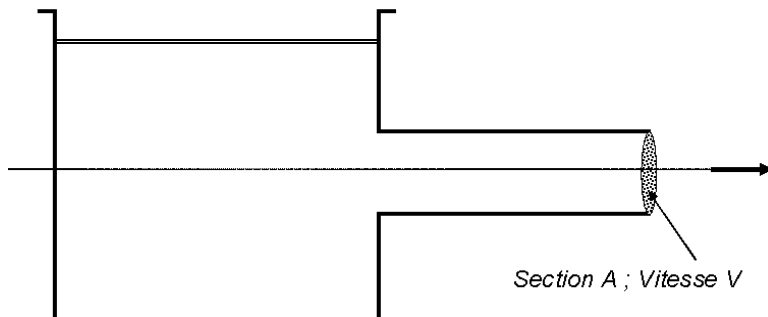
La formule de calcul s'écrit : $h_{srb} = \zeta_{rb} \frac{V^2}{2g}$

Avec : ζ_{rb} = Coefficient due au rétrécissement brusque donné par le tableau suivant :

| | | | |
|--------------|------|------|------|
| A_1/A_2 | 0,1 | 0,5 | 0,7 |
| ζ_{rb} | 0,41 | 0,24 | 0,14 |

Remarque : Cas particulier d'une sortie à partir d'un réservoir :

**Rétrécissement brusque de la section
Cas d'une sortie " Réservoir – Conduite "**



Section A ; Vitesse V

Formule de calcul : $h_{sen} = \zeta_{en} \frac{V^2}{2g}$ Avec : $\zeta_{en} = 0,5$

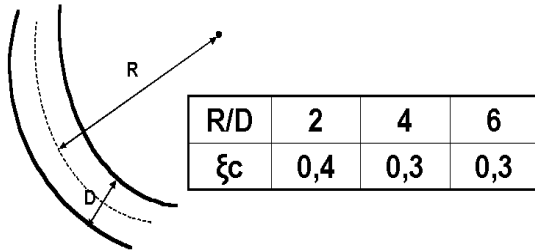
c.- Autres pertes de charge singulières :

D'autres types de pertes de charge peuvent avoir lieu dans les conduites :

- Coudes
- Vannes
- Crépines , etc...

Exemple : Cas d'un coude :

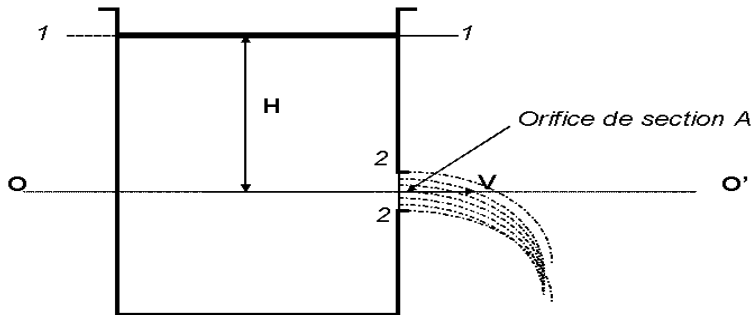
Cas d'un Coude



III.3.- Applications Particulières de l'Equation Générale d'Écoulement

III.3.1.- Cas d'un Écoulement à travers un Orifice : Formule de **Torricelli**

Écoulement à travers un Orifice en charge



Application de l'équation de Bernoulli entre les sections 1-1 et 2-2 par rapport à l'axe de référence O-O' :

- Section 1-1 :

- * $Z_1 = H$
- * $P_1 = P_{atm}$
- * $V_1 = 0$

- Section 2-2 :

- * $Z_2 = 0$
- * $P_2 = P_{atm}$
- * $V_2 = V$

On aura donc :
$$H + \frac{P_{atm}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + h_w$$

Si nous négligeons les pertes de charge : $h_w = 0$, l'équation devient :

$$H = \frac{V^2}{2g}$$
 et donc :
$$\boxed{V = \sqrt{2gH}}$$
 : Formule de **Torricelli**

Si nous passons au débit d'écoulement à travers l'orifice :

$$Q = A'V$$
 avec A' = Section contractée de l'écoulement

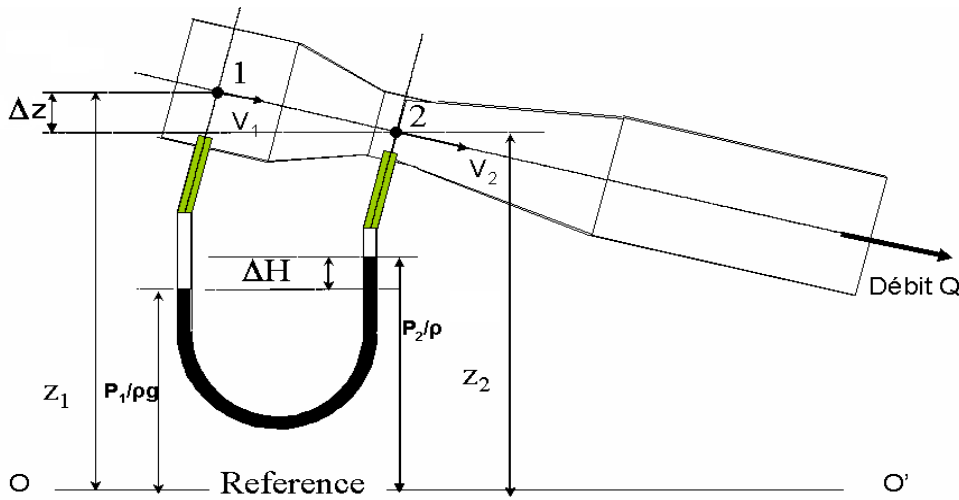
$$\rightarrow Q = A'\sqrt{2gH}$$

En posant $A' = mA$ avec $m = A'/A$ = Coefficient de contraction de l'écoulement

$$\boxed{Q = A'\sqrt{2gH} = mA\sqrt{2gH}}$$

avec : - $m \approx 0,597$ ou formule empirique :
$$m = 0,592 + \frac{4,5}{\sqrt{Re}}$$

III.3.2.- Cas d'un Ecoulement à travers un tube de **Venturi**



Débitmètre de Venturi

Le débitmètre de Venturi est un appareil qui utilise l'équation de Bernoulli pour mesurer le débit dans les conduites, et ce à l'aide d'une simple mesure des pressions P_1 et P_2 :

Par rapport à OO' , l'équation de Bernoulli appliquée entre les sections 1 et 2 donne :

- Section 1 :

* Z_1

* P_1

* V_1

- Section 2 :

* Z_2

* P_2

* V_2

On aura donc : $Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_w$

Si nous négligeons les pertes de charge : $h_w = 0$: $\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = Z_1 - Z_2 + \frac{P_1}{\rho g} - \frac{P_2}{\rho g} = \Delta Z + \Delta H$

Comme l'équation de continuité nous permet d'écrire que : $A_1 V_1 = A_2 V_2 \Rightarrow V_1 = \frac{A_2}{A_1} V_2$

Donc : $\frac{V_2^2}{2g} - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 \frac{V_2^2}{2g} = \Delta Z + \Delta H \Rightarrow \frac{V_2^2}{2g} \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) = \Delta Z + \Delta H$

Et finalement : $V_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{2g(\Delta H + \Delta Z)}$

Et comme $Q = A_2 V_2$:

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{2g(\Delta H + \Delta Z)}$$

Remarque : Dans la plupart des cas, le débitmètre de Venturi est placé horizontalement ce qui fait que $Z_1 = Z_2$

et donc : $\Delta Z = 0$ et la formule précédente se simplifie :

$$Q = \frac{A_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2}} \sqrt{2g\Delta H}$$

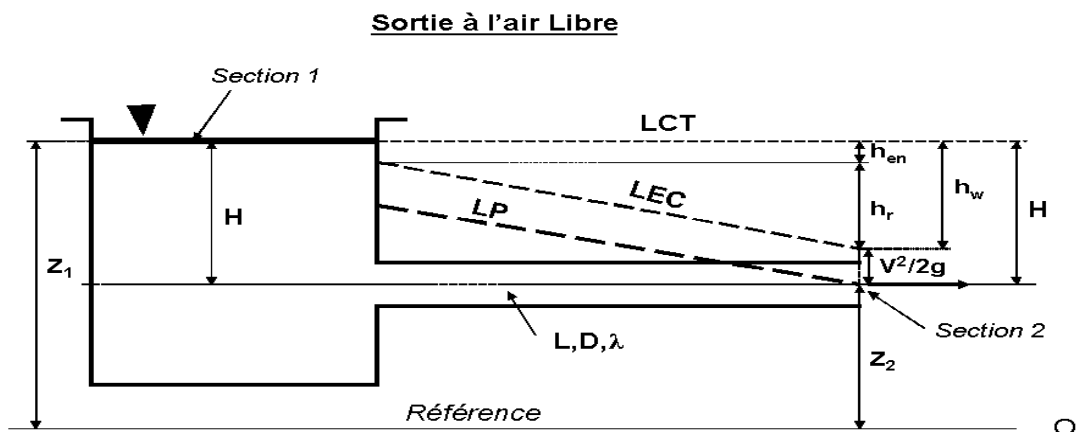
et si on introduisait les diamètres d_1 et d_2 des 2 sections : $A = \frac{\pi d^2}{4}$:

$$Q = \frac{\pi d_2^2}{4 \sqrt{1 - \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4}} \sqrt{2g\Delta H}$$

III.4.- Branchements de Conduites

III.4.1.- Conduite à Section Constante (Conduite simple)

a.- Sortie à l'air libre



- **LCT** = Ligne de Charge Totale
- **LEC** = Ligne d'Énergie Cinétique
- **LP** = Ligne Piézométrique

On se propose d'établir l'expression du débit d'écoulement du système :
Application de l'équation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 par rapport à OO' :

- Section 1 :

- * Z_1
- * $P_1 = P_{atm}$
- * $V_1 = 0$ (niveau constant)

- Section 2 :

- * Z_2
- * $P_2 = P_{atm}$
- * $V_2 = V$

$$Z_1 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + 0 = Z_2 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + h_w \Rightarrow Z_1 - Z_2 = H = \frac{V^2}{2g} + h_w$$

$$H = \frac{V^2}{2g} + h_w = \frac{V^2}{2g} + \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \zeta_{en} \frac{V^2}{2g} = \left(1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_{en}\right) \frac{V^2}{2g}$$

et donc :

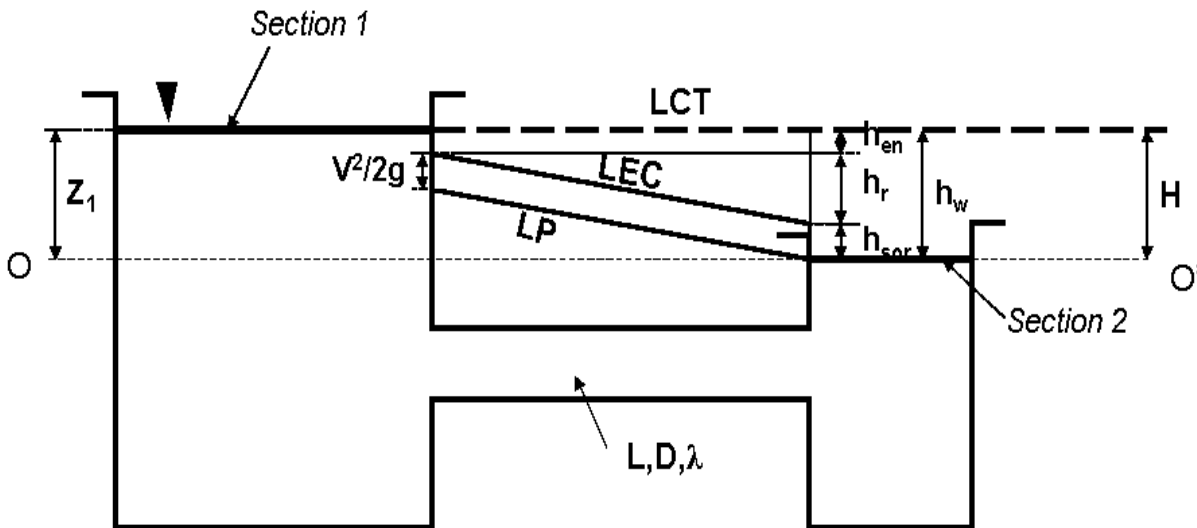
$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_{en}}} \sqrt{2gH}$$

et comme le débit : $Q = AV = \pi \frac{D^2}{4} V$:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4 \sqrt{1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_{en}}} \sqrt{2gH}$$

b.- Sortie immergée :

Sortie Immergée



On se propose d'établir l'expression du débit d'écoulement du système :
Application de l'équation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 par rapport à OO' :

- Section 1 :

- * $Z_1 = H$
- * $P_1 = P_{atm}$
- * $V_1 = 0$ (niveau constant)

- Section 2 :

- * $Z_2 = 0$
- * $P_2 = P_{atm}$
- * $V_2 = 0$ (niveau constant)

$$H + \frac{P_{atm}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + h_w \Rightarrow H = h_w$$

$$H = h_w = \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} + \zeta_{en} \frac{V^2}{2g} + \zeta_{sor} \frac{V^2}{2g} = \left(\lambda \frac{L}{D} + \zeta_{en} + \zeta_{sor} \right) \frac{V^2}{2g}$$

et donc :

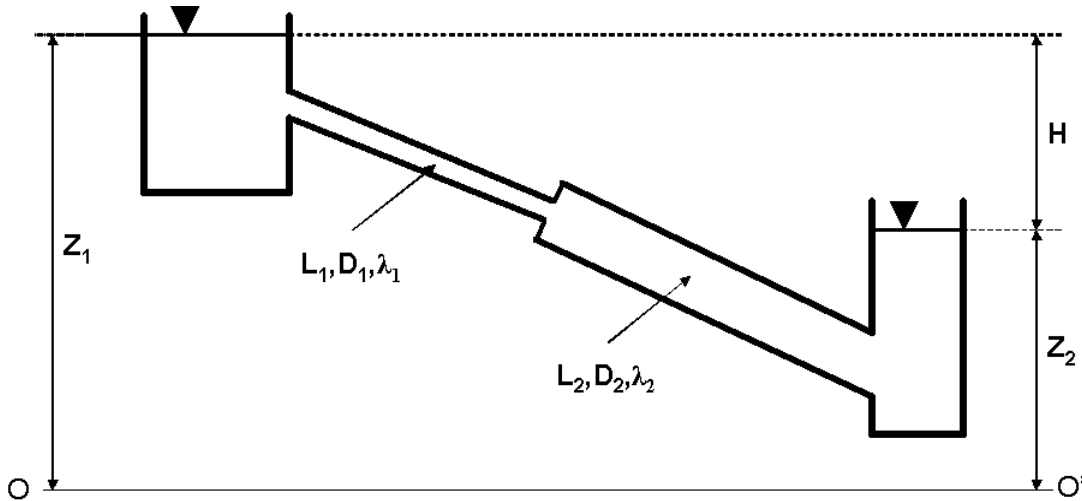
$$V = \frac{1}{\sqrt{\lambda \frac{L}{D} + \zeta_{en} + \zeta_{sor}}} \sqrt{2gH}$$

et comme le débit : $Q = AV = \pi \frac{D^2}{4} V$:

$$Q = \frac{\pi D^2}{4 \sqrt{\lambda \frac{L}{D} + \zeta_{en} + \zeta_{sor}}} \sqrt{2gH}$$

III.4.2.- Conduites à Section variable (Conduites multiples)

a.- Branchement en Série



Equation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 par rapport à OO' :

- Section 1 :

* Z_1

* $P_1 = P_{atm}$

* $V_1 = 0$ (niveau constant)

- Section 2 :

* Z_2

* $P_2 = P_{atm}$

* $V_2 = 0$ (niveau constant)

$$Z_1 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + 0 = Z_2 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + 0 + h_w \Rightarrow Z_1 - Z_2 = H = h_w$$

$$H = h_w = h_{r1} + h_{r2} + h_{en} + h_{eb} + h_{sor} = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \frac{V_2^2}{2g} + \zeta_{en} \frac{V_1^2}{2g} + \zeta_{eb} \frac{V_1^2}{2g} + \zeta_{sor} \frac{V_2^2}{2g}$$

Or, $V_1 A_1 = V_2 A_2 \Rightarrow V_2 = \frac{A_1}{A_2} V_1$

$$H = \lambda_1 \frac{L_1}{D_1} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{V_1^2}{2g} + \zeta_{en} \frac{V_1^2}{2g} + \zeta_{eb} \frac{V_1^2}{2g} + \zeta_{sor} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \frac{V_1^2}{2g}$$

$$H = \left(\lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 + \zeta_{en} + \zeta_{eb} + \zeta_{sor} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right) \frac{V_1^2}{2g}$$

et donc :

$$V_1 = \frac{1}{\left(\lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 + \zeta_{en} + \zeta_{eb} + \zeta_{sor} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right)} \sqrt{2gH}$$

et le débit correspondant :

$$Q = \frac{\pi D_1^2}{4 \left(\lambda_1 \frac{L_1}{D_1} + \lambda_2 \frac{L_2}{D_2} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 + \zeta_{en} + \zeta_{eb} + \zeta_{sor} \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right)} \sqrt{2gH}$$

Remarque : Simplification des Calculs : Utilisation de la formule de Chézy :

On a vu que la formule de Chézy s'écrit : $h_w = 1,1 \beta \frac{Q^2}{K^2} L$

Appliquée au système du schéma précédent , elle donne (en considérant $\beta = 1,0$ et en négligeant les pertes

singulières) : $H = h_w = \frac{Q_1^2}{K_1^2} L_1 + \frac{Q_2^2}{K_2^2} L_2$ et comme $Q_1 = Q_2 = Q$: $H = Q^2 \left(\frac{L_1}{K_1^2} + \frac{L_2}{K_2^2} \right)$

et donc :

$$Q = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{\frac{L_1}{K_1^2} + \frac{L_2}{K_2^2}}}$$

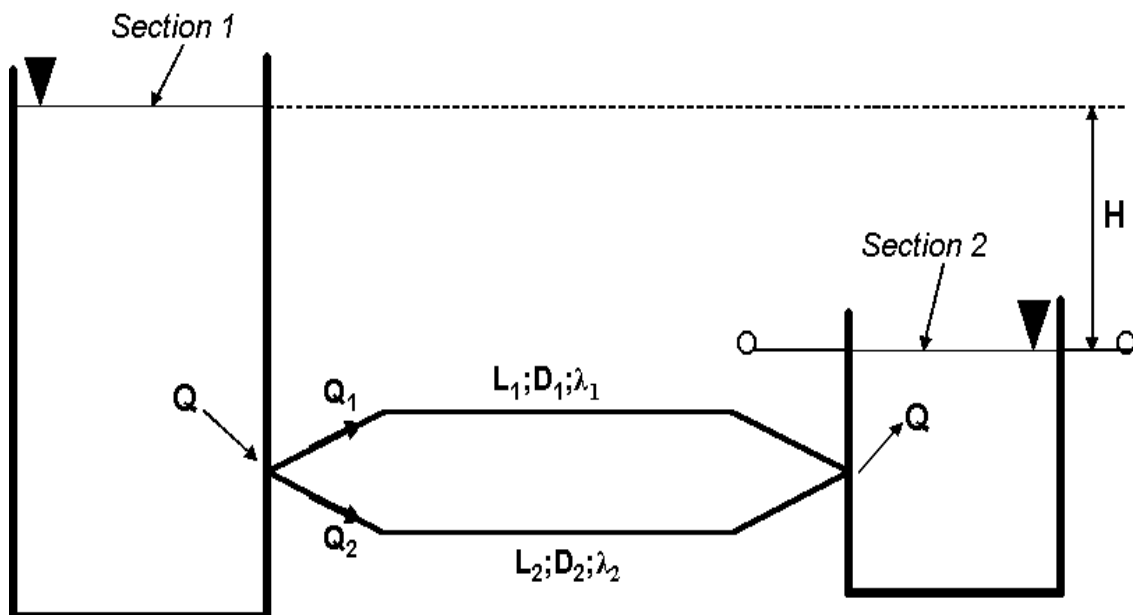
Conclusion : Cas de **n** conduites placées en série :

- Les pertes de charge s'ajoutent : $h_w = h_{r1} + h_{r2} + \dots + h_{rn}$
- Les débits sont égaux : $Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$

Et la formule générale de calcul s'écrit :

$$Q = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{\sum_1^n \frac{L_i}{K_i^2}}}$$

b- Branchement en Parallèle :



Equation de Bernoulli entre les sections 1 et 2 par rapport à OO' :

- Section 1 :

- * $Z_1 = H$
- * $P_1 = P_{atm}$
- * $V_1 = 0$ (niveau constant)

- Section 2 :

- * $Z_2 = 0$

- * $P_2 = P_{atm}$
- * $V_2 = 0$ (niveau constant)

Dans ce cas , on a vu que l'équation de Bernoulli donne : $H = h_w$

Dans le cas d'un branchement en parallèle :

- Les pertes de charges sont égales : $h_{r1} = h_{r2} = h_w$
- Les débits s'ajoutent : $Q = Q_1 + Q_2$

Or , la formule de Chézy nous permet d'écrire que : $h_{r1} = \frac{Q_1^2}{K_1^2} L_1 \Rightarrow Q_1 = K_1 \sqrt{\frac{h_{r1}}{L_1}}$

et $h_{r2} = \frac{Q_2^2}{K_2^2} L_2 \Rightarrow Q_2 = K_2 \sqrt{\frac{h_{r2}}{L_2}}$ d'où : $Q = Q_1 + Q_2 = K_1 \sqrt{\frac{h_{r1}}{L_1}} + K_2 \sqrt{\frac{h_{r2}}{L_2}}$

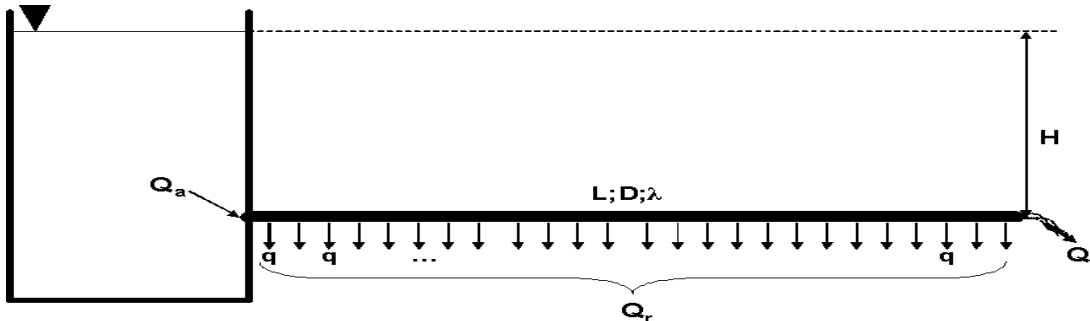
et comme : $h_{r1} = h_{r2} = h_w = H$ (Equation de Bernoulli) :

$$Q = \left(\frac{K_1}{\sqrt{L_1}} + \frac{K_2}{\sqrt{L_2}} \right) \sqrt{H}$$

et d'une manière générale :

$$Q = \sqrt{H} \sum_1^n \frac{K_i}{\sqrt{L_i}}$$

c.- Conduite assurant un service de route :



- $Q_r = \text{Débit de Route} = qL$
- $Q_t = \text{Débit de Transit à la sortie de la conduite}$
- $Q_a = \text{Débit d'Alimentation} = Q_r + Q_t$

Le schéma représente une conduite de longueur L servant à la fois à Transiter un débit et distribuant uniformément tout le long un débit de Route q (m³/s/m) .

Ce système peut être assimilé au cas d'une conduite équivalente de même Longueur et dans laquelle passera un

Débit calculé par la formule : $Q = Q_t + 0,55 Q_r$

et la perte de charge correspondante est calculée en fonction de ce débit Q par la formule :

$$h_w = \frac{Q^2}{K^2} L = \frac{(Q_t + 0,55 Q_r)^2}{K^2} L$$

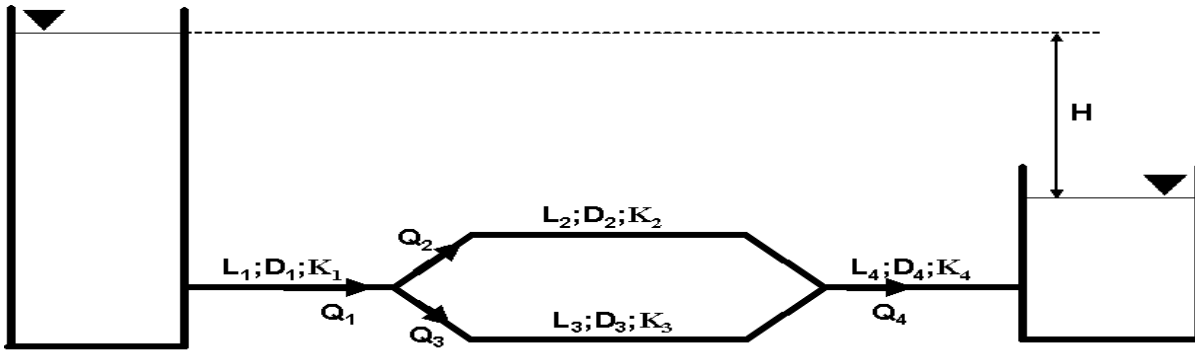
Remarque : Cas d'un débit d'alimentation complètement consommé en service de route :

Dans ce cas , cela veut dire qu'il n'y aura pas de débit de transit en fin de conduite et donc $Q_t = 0$ et par

conséquent la formule précédente devient :

$$h_w = \frac{(0,55 Q_r)^2}{K^2} L$$

d.- Branchement Mixte (Série et Parallèle) :



$$\rightarrow Q_1 = Q_2 + Q_3 = Q_4$$

$$\rightarrow h_{r2} = h_{r3} \text{ (Conduites en parallèle)}$$

$$\rightarrow h_w = h_{r1} + h_{r2} + h_{r4}$$

Pour ce système on peut écrire les équations suivantes :

- $H = h_w$ (Equation de Bernoulli)
- $Q = Q_1 = Q_2 + Q_3 = Q_4$
- $h_{r2} = h_{r3}$ (Conduites en parallèle)

Exprimons les pertes de charge à l'aide de la formule de Chézy :

$$h_{r1} = \frac{Q_1^2}{K_1^2} L_1 ; \quad h_{r2} = \frac{Q_2^2}{K_2^2} L_2 ; \quad h_{r3} = \frac{Q_3^2}{K_3^2} L_3 ; \quad h_{r4} = \frac{Q_4^2}{K_4^2} L_4$$

Comme on a : $Q = Q_1 = Q_4 \Rightarrow h_{r1} = \frac{Q^2}{K_1^2} L_1$ et $h_{r4} = \frac{Q^2}{K_4^2} L_4$

et comme : $Q = Q_2 + Q_3 : Q = K_2 \sqrt{\frac{h_{r2}}{L_2}} + K_3 \sqrt{\frac{h_{r3}}{L_3}} = \sqrt{h_{r2}} \left(\frac{K_2}{\sqrt{L_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{L_3}} \right)$

ce qui donne :
$$h_{r2} = \frac{Q^2}{\left(\frac{K_2}{\sqrt{L_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{L_3}} \right)^2}$$

et finalement , puisque : $H = h_w = h_{r1} + h_{r2} + h_{r4} : H = \frac{Q^2}{K_1^2} L_1 + \frac{Q^2}{\left(\frac{K_2}{\sqrt{L_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{L_3}} \right)^2} + \frac{Q^2}{K_4^2} L_4 = Q^2 \left(\frac{L_1}{K_1^2} + \frac{L_4}{K_4^2} + \frac{1}{\left(\frac{K_2}{\sqrt{L_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{L_3}} \right)^2} \right)$

et donc :

$$Q = \frac{\sqrt{H}}{\sqrt{\frac{L_1}{K_1^2} + \frac{L_4}{K_4^2} + \frac{1}{\left(\frac{K_2}{\sqrt{L_2}} + \frac{K_3}{\sqrt{L_3}} \right)^2}}}$$