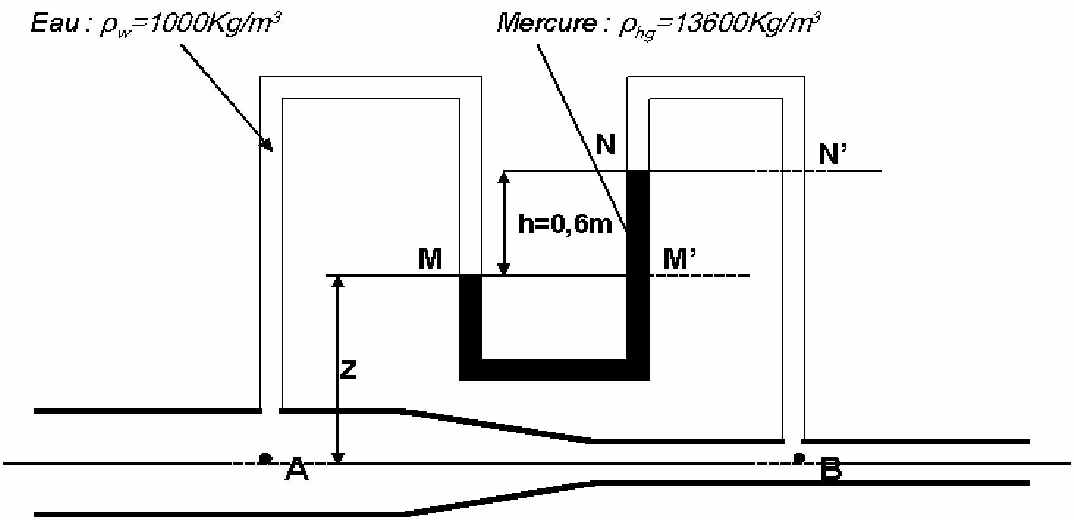
I.- PRESSION – MANOMETRES

- ***Exercice 1*** : Calculer la différence de pression $P_A - P_B$ pour le schéma suivant :



SOLUTION :

Appliquons le principe de la statique des fluides pour :

- *Partie gauche du système :*

$$P_A = P_M + \rho_w gZ = \rho_w gZ + P_{M'} (car : P_M = P_{M'})$$

- *Partie droite du système :*

$$P_B = P_{N'} + \rho_w g(Z+h) = \rho_w g(Z+h) + P_N (car : P_{N'} = P_N)$$

- *Partie centrale du système :*

$$P_M = P_{M'} = P_N + \rho_{Hg} gh = \rho_{Hg} gh + P_{N'}$$

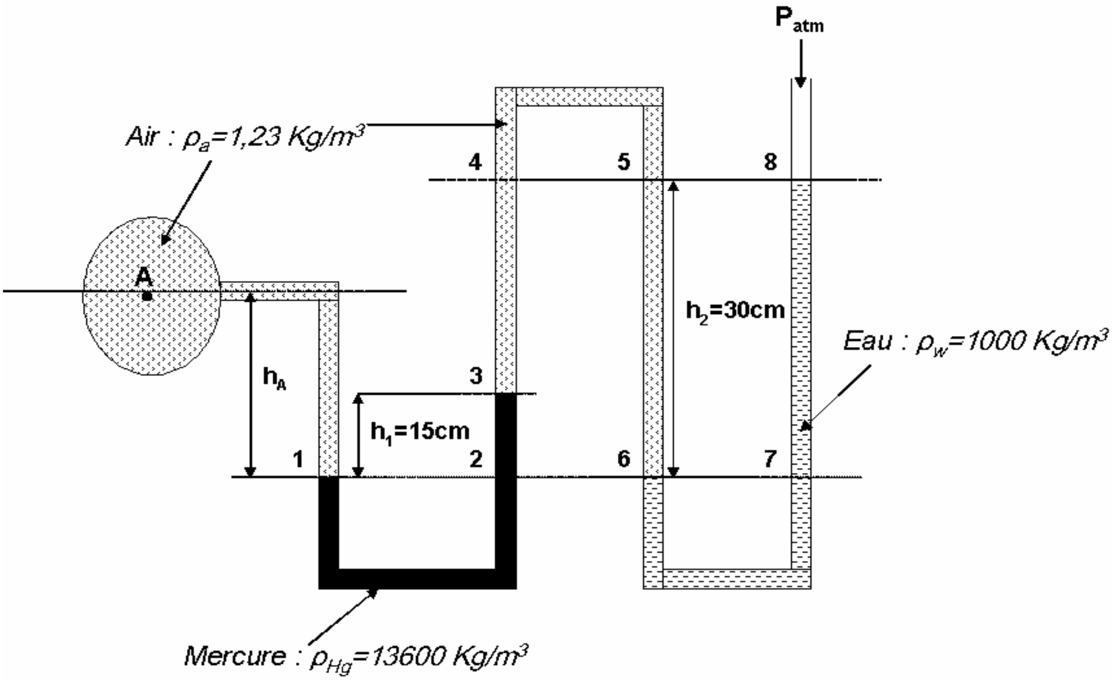
Ce qui donne :

$$P_A = P_M + \rho_w gZ = \rho_w gZ + \rho_{Hg} gh + P_{N'} = \rho_w gZ + \rho_{Hg} gh + P_B - \rho_w g(Z+h)$$

$$\boxed{P_A - P_B = \rho_w gZ + \rho_{Hg} gh - \rho_w g(Z+h) \Rightarrow P_A - P_B = (\rho_{Hg} - \rho_w)gh}$$

AN : $\boxed{P_A - P_B = (13,6-1)9,814.0,6 = 74194\ N/m^2 = 74,2KN/m^2}$

- *Exercice 2* : Calculer la pression P_A au point A du schéma suivant :



SOLUTION :

On peut écrire que : $P_1=P_2=P_6=P_7$
Et que :

$$P_1 = P_A + \rho_a g h_A \Rightarrow P_A = P_1 - \rho_a g h_A$$

$$P_1 = P_2 = P_4 + \rho_{Hg} g h_1 + \rho_a g (h_2 - h_1)$$

Donc :

$$P_A = P_4 + \rho_{Hg} g h_1 + \rho_a g (h_2 - h_1 - h_A)$$

Or on a aussi :

$$P_4 = P_5 \text{ et } P_6 = P_5 + \rho_a g h_2 \Rightarrow P_5 = P_4 = P_6 - \rho_a g h_2$$

et $P_6 = P_7 = P_8 + \rho_w g h_2 = P_{atm} + \rho_w g h_2$

et donc finalement :

$$P_A = P_{atm} + \rho_w g h_2 - \rho_a g h_2 + \rho_{Hg} g h_1 + \rho_a g (h_2 - h_1 - h_A)$$

$$P_A = \rho_w g h_2 - \rho_a g (h_1 + h_A) + \rho_{Hg} g h_1 + P_{atm}$$

$$P_A = \rho_{Hg} \left[\frac{\rho_w}{\rho_{Hg}} g h_2 - \frac{\rho_a}{\rho_{Hg}} g (h_1 + h_A) + g h_1 \right] + P_{atm}$$

Le terme $\dfrac{\rho_a}{\rho_{Hg}}$ tend vers zéro et donc la relation devient :

$$P_A = \rho_w g h_2 + \rho_{Hg} g h_1 + P_{atm}$$

et la pression effective en A ($P_{atm} = 0$) :

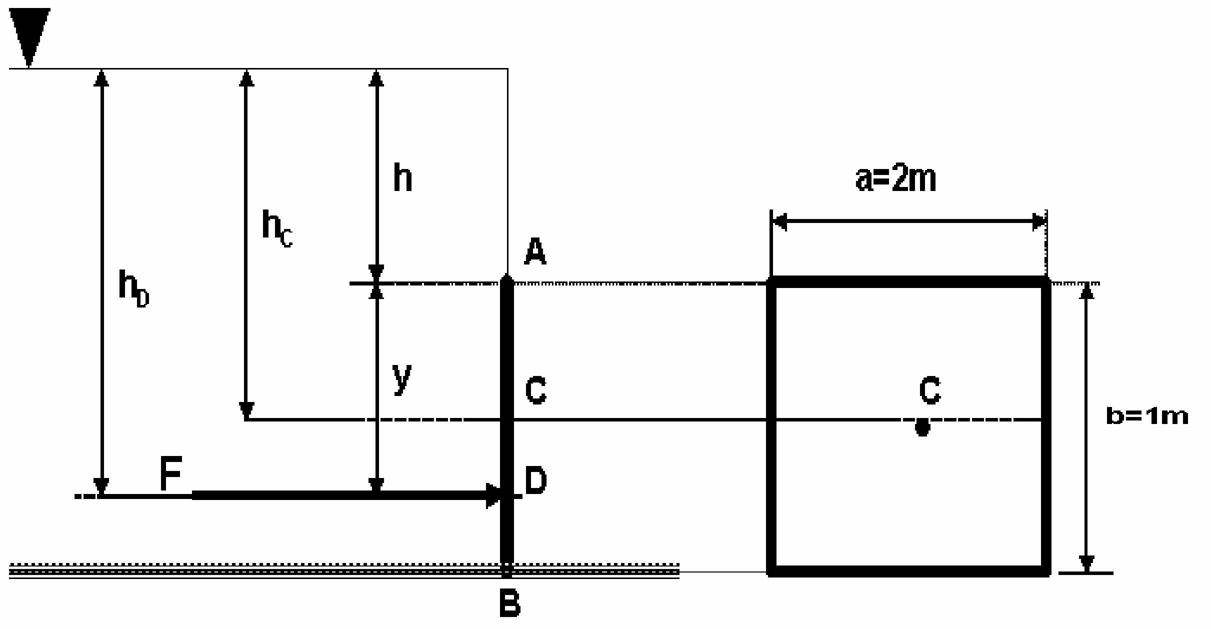
$$\boxed{P_A = \rho_w g h_2 + \rho_{Hg} g h_1}$$

AN :

$$\boxed{P_A = 10^3 x 9.814 x 0.30 + 13600 x 9.814 x 0.15 = 22965 N/m^2 \approx 23 kN/m^2}$$

II.- FORCES DE PRESSION

- *Exercice 1* : Soit une plaque AB rectangulaire de hauteur b = 1m et de longueur a = 2m immergée dans l'eau à une profondeur h = 2 m. La plaque pivote autour du point A.
1.- Calculer la force de pression résultante exercée par l'eau sur la plaque AB
2.- Calculer le moment de cette force par rapport au point A



SOLUTION :

1.- Calcul de la force F :
On sait que pour une surface plane , l'expression de la force résultante s'écrit :
$F = \rho_w g h_c A$ avec :

- h_c = Profondeur du centre de gravité de la surface AB = h + b/2
- A = Surface de la plaque AB = ab

Donc : $\boxed{F = \rho_w g h_c A = \rho_w g (h + \frac{b}{2}) ab}$

AN : $\boxed{F = 10^3 x 9.814 x \left(2 + \frac{1}{2}\right) x 2 x 1 = 49070\,N = 49\,kN}$

2.- Calcul du moment de la force F par rapport à A :

On écrit l'expression du moment de F par rapport au point A :

$$\mathrm{M}_A F = Fy = F(h_D - h)$$

avec : h_D = profondeur du centre d'application de la force F qui est calculé par la formule suivante :

$h_D = h_c + \frac{I_{oo}}{h_c A}$ avec : $I_{oo} = \frac{ab^3}{12}$ moment d'inertie de la surface AB par rapport à un axe passant par son centre de gravité C .

$$h_D = h_c + \frac{ab^3}{12 h_c ab} = h_c + \frac{b^2}{12 h_c} = 2{,}5 + \frac{1}{12.2{,}5} = 2{,}53 m$$

Donc : $\boxed{\mathrm{M}_A F = F(h_D - h) = 49.(2{,}53 - 2) = 25{,}97 \approx 26\,KNm}$

- *Exercice 2* : Le schéma ci-dessous représente un réservoir rempli d'eau comprenant à sa base deux vannes de même longueur **L** :

- Vanne AB de forme rectangulaire, de largeur **b** et inclinée d'un angle **ß** par rapport à l'horizontale.
- Vanne CD dont la forme représente un quart de cercle de rayon **R**.

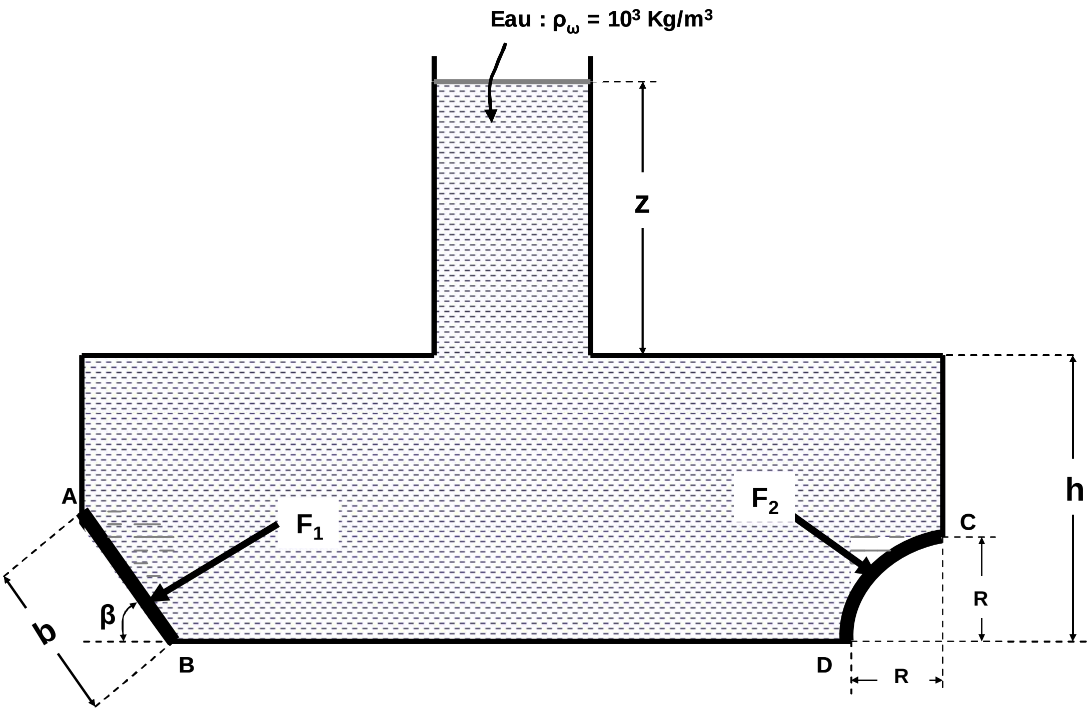
Données : z = 3 m ; h = 5 m ; b = 2,5 m ; R = 2 m ; L = 4 m ; ß = 30° .

Calculer :

1.- La **pression** de l'eau sur le fond du réservoir .

2.- La **force de poussée hydrostatique F_1** s'exerçant sur la vanne **AB**

3.- La **force de poussée hydrostatique F_2** s'exerçant la vanne **CD** .



SOLUTION :

1.- *Pression sur le fond du réservoir :*

$$\boxed{P = \rho_\omega g(h+z) = 10^3 x 9.814 x (5+3) = 78513 N/m^2 = 78,5 kN/m^2 = 78,5 kPa}$$

2.- *Calcul de la force F_1 :*

On sait que la force de pression sur une surface plane s'exprime par la relation :

$F = \rho_\omega g h_c A$ avec : $A = bL = 2,5x4 = 10 m^2$ et $h_c = h - \frac{b}{2}\sin\beta + z = 5 - \frac{2,5}{2}\sin(30°) + 3 = 7,375 m$

Et donc :

$$\boxed{F = \rho_\omega g\left(h - \frac{b}{2}\sin\beta + z\right) bL = 10^3 x 9.814 x 7,375 x 10 = 723782,5 N \approx 724 kN}$$

3.- *Calcul de la force F_2 :*

On sait que la force de pression sur une surface courbe s'exprime par la relation :

$F_2 = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2}$ avec F_H et F_V composantes horizontale et verticale .

a. Calcul de F_H : la composante horizontale s'applique sur la projection verticale de la surface courbe CD :

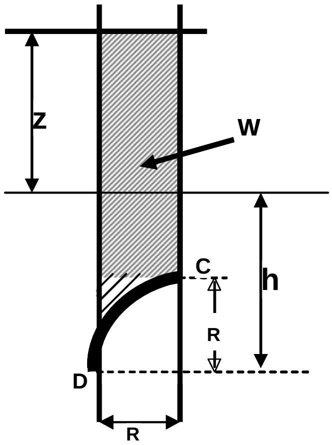
$F_H = \rho_\omega g h_c A'$ avec : $A' = RL = 2x4 = 8 m^2$ et $h_c = h - \frac{R}{2} + z = 5 - \frac{2}{2} + 3 = 7 m$

Et donc :

$$F_H = \rho_\omega g h_c A' = \rho_\omega g\left(h - \frac{R}{2} + z\right)RL = 10^3 x9.814x7x8 = 549584N \approx 550kN$$

b. Calcul de F_V : la composante verticale est représentée par un poids d'eau :

$F_V = \rho_\omega g W$ avec W : volume délimité par la surface libre du liquide, la surface courbe CD et les 2 verticales passant par les extrémités C et D comme le montre le schéma ci-dessous :



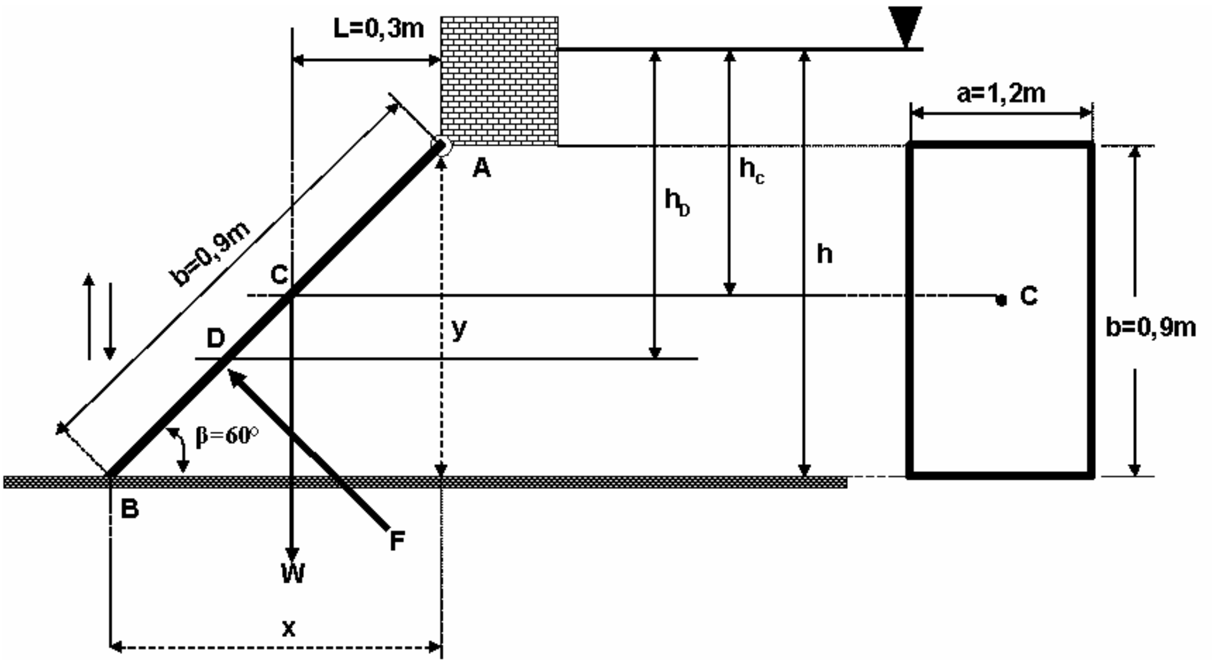
Et donc : $W = \left[(h+z)R - \frac{\pi R^2}{4}\right]L$

Et : $$F_V = \rho_\omega g\left[(h+z)R - \frac{\pi R^2}{4}\right]L = 10^3 x9.814x\left[(5+3)x2 - \frac{3{,}14x2^2}{4}\right]x4 = 504832N \approx 505kN$$

c. Calcul de F_2

$$F_2 = \sqrt{{F_H}^2 + {F_V}^2} = \sqrt{550^2 + 505^2} \approx 747kN$$

- *Exercice 3* : Le schéma montre une vanne AB rectangulaire , pivotant autour de A (toutes les autres indications sont mentionnées sur le schéma) .
Quel serait le poids W de la vanne correspondant à h = 2,8 m , hauteur de fermeture de la vanne (équilibre de la vanne) .



SOLUTION :

on a (voir schéma) : y = bsinß et x = bcosß

Le condition d'équilibre de la vanne correspond à l'égalité des moments de F et W par rapport à A :

$\mathrm{M}_A F = \mathrm{M}_A W$ avec les expressions des moments :

$\mathrm{M}_A F = F.AD$

$\mathrm{M}_A F = W.L$

- ***Calcul de F :***

$$F = \rho_w g h_c A = \rho_w g(h - \frac{y}{2})ab = \rho_w g(h - \frac{b\sin\beta}{2})ab = 25314 N/m^2$$

- ***Calcul de la position du centre de poussée : y_D***

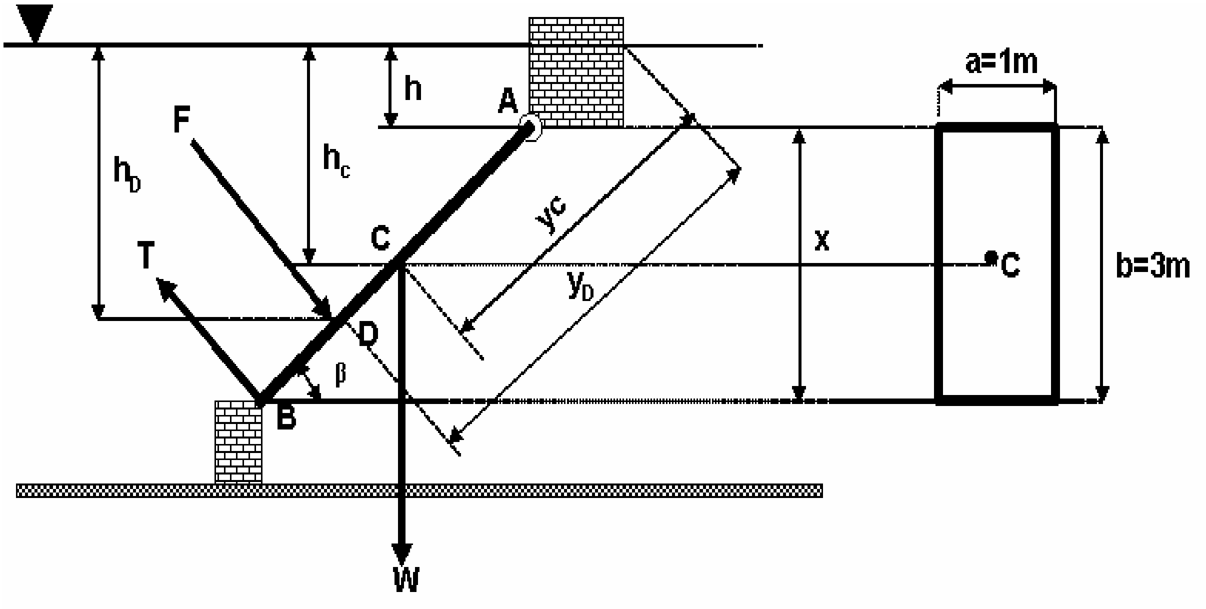
$$y_D = y_c + \frac{Icc}{ycA} = h_c \sin\beta + \frac{ab^3}{12 h_c \sin\beta ab} = hc\sin\beta + \frac{b^2}{12 h_c \sin\beta} = 2{,}80m$$

d'où la distance AD : $AD = \frac{b}{2} + (y_D - y_c) = 0{,}47m$

et finalement :

$$\mathrm{M}_A F = W.L \Rightarrow W = \frac{\mathrm{M}_A F}{L} = \frac{F.AD}{L} = \frac{25314 0{,}47}{0{,}3} = 39659 N = 39{,}7 KN$$

- ***Exercice 4*** : Déterminer la force T que l'on doit exercer au point B pour ouvrir la vanne AB pivotant autour du point A si le poids de la vanne est W = 2 KN , qu'elle est inclinée d'un angle ß=30° et immergée à une profondeur h=1m.



SOLUTION :

On voit bien que pour ouvrir la vanne AB , la force T doit vaincre la force de pression F et le poids W de la vanne qui ont tendance à fermer la vanne . La condition d'ouverture de la vanne autour du point A est donc la suivante :

$$\mathrm{M}_A T \geq \mathrm{M}_A F + \mathrm{M}_A W$$

avec : $\mathrm{M}_A T = T.AB = T.b$ et $\mathrm{M}_A F = F.AD = F.(\frac{b}{2} + y_D - y_c)$

- ***Calcul de la force de pression F :***

$$F = \rho_w g h_c A = \rho_w g(\frac{b}{2}\sin\beta + h)ab = 51502N = 51{,}5KN$$

- ***Calcul de la position du centre de pression :***

$$y_D = y_c + \frac{Icc}{y_c A} \quad \text{avec :} \quad y_c = \frac{b}{2} + \frac{h}{\sin\beta} = 3{,}5m$$

donc :

$$y_D = y_c + \frac{Icc}{y_c A} = y_c + \frac{ab^3}{12 y_c ab} = y_c + \frac{b^2}{12 y_c} = 3{,}71m$$

d'où le moment de F par rapport à A :

$$\mathrm{M}_A F = F.(\frac{b}{2} + y_D - y_c) = 88{,}1KNm$$

- ***Calcul du moment du poids de la vanne par rapport au point A :***

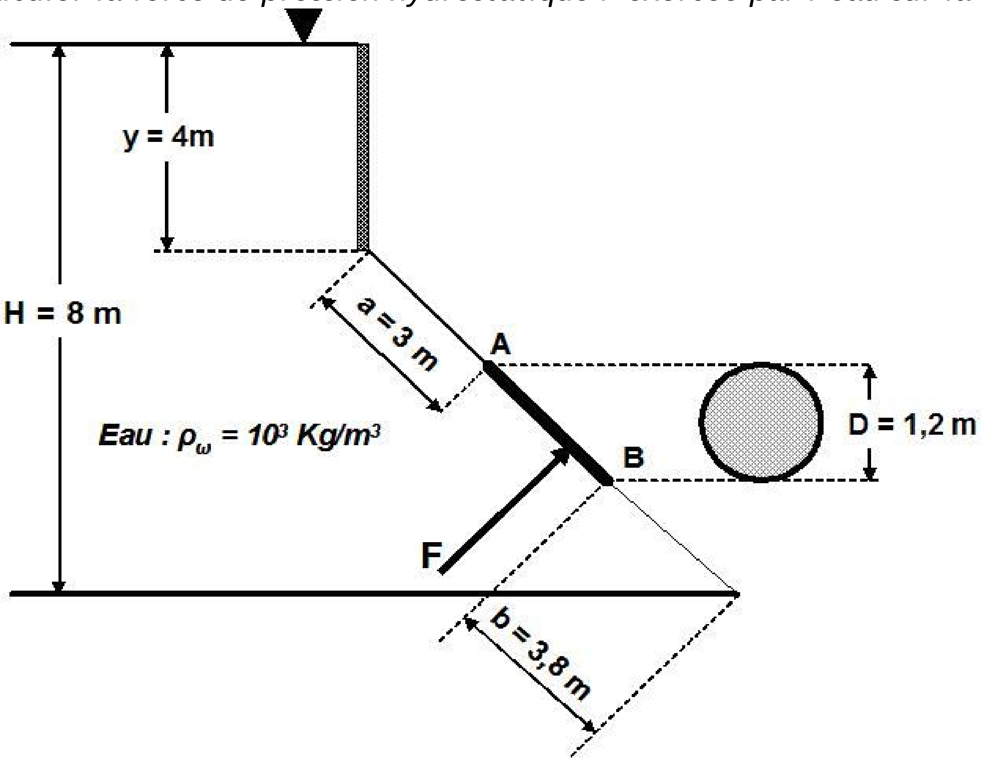
$$M_A W = W.\frac{b}{2}\cos\beta = 2\frac{3}{2}\cos 30 = 2,6 KNm$$

- ***Calcul de la force T nécessaire pour ouvrir la vanne :***

La force T est déterminée à partir de la condition d'ouverture de la vanne :

$$\boxed{M_A T \geq M_A F + M_A W \Rightarrow Tb \geq M_A F + M_A W \Rightarrow W \geq \frac{M_A F + M_A W}{b} = 30,2 KN}$$

- *Exercice 5* : Le schéma représente une vanne immergée AB de forme circulaire retenant de l'eau et inclinée par rapport à l'horizontale . Toutes les dimensions sont mentionnées sur le schéma . *Calculer la force de pression hydrostatique F exercée par l'eau sur la vanne AB .*



On sait que l'expression d'une force de pression sur une surface plane s'écrit :

- $F = \rho_\omega g h_c A$

Avec :

- A = surface AB : $A = \pi\frac{D^2}{4} = \pi\frac{1,2^2}{4} = 1,13 m^2$
- h_c = profondeur du centre de gravité de la surface AB :

Soit α l'angle d'inclinaison de la surface AB par rapport à l'horizontale , on a :

$h_c = y + \left(\frac{D}{2} + a\right)\sin\alpha$, or : $\sin\alpha = \frac{H-y}{a+D+b} = \frac{8-4}{3+1,2+3,8} = \frac{4}{8} = 0,5$

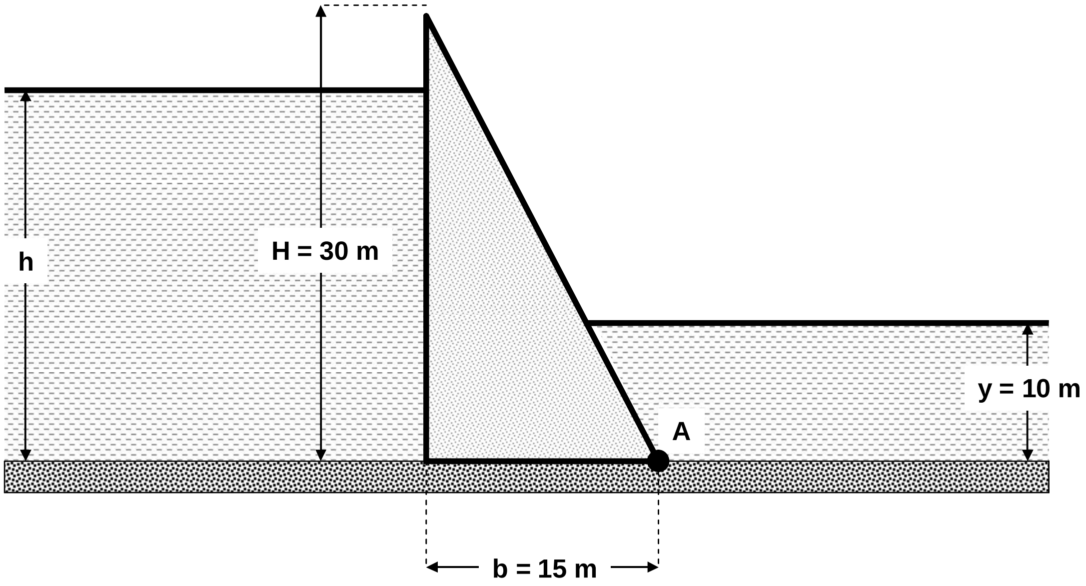
et donc :

$$h_c = y + \left(\frac{D}{2} + a\right)\sin\alpha = 4 + \left(\frac{1,2}{2} + 3\right)x0,5 = 5,8m$$

et finalement :

$$F = \rho_\omega h_c A = 10^3 x 9{,}814\ x 5{,}8 x 1{,}13 \approx 64321\ N = 64{,}3 KN$$

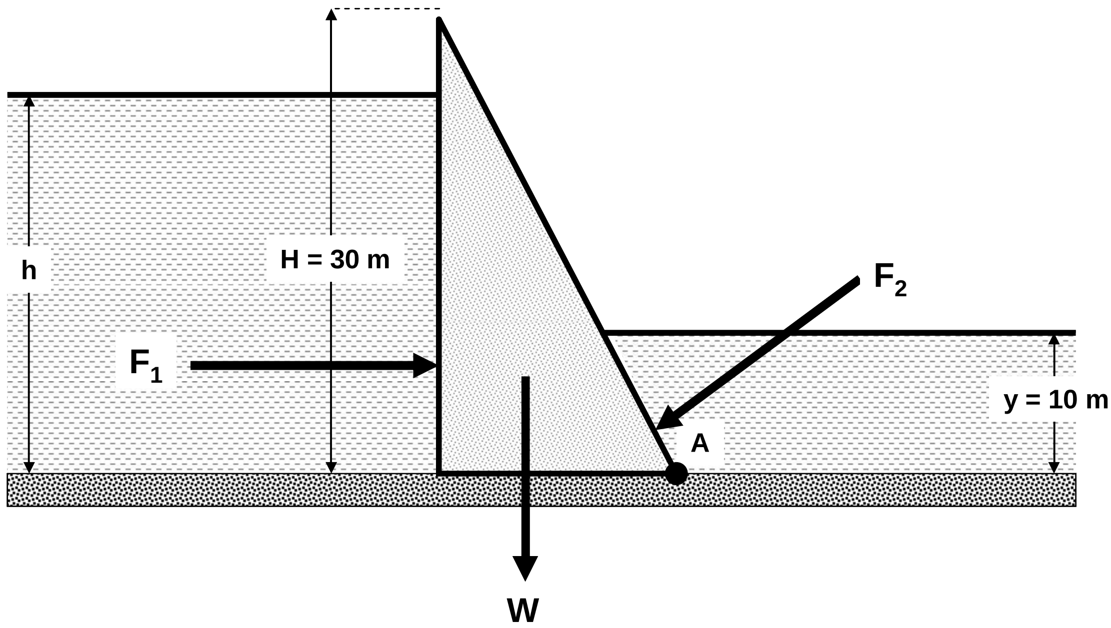
- *Exercice 6* : Le schéma suivant montre un barrage d'eau , de hauteur H = 30 m , de largeur à la base b = 15 m et de longueur L = 100 m , retenant une hauteur h d'eau à son amont et une hauteur y = 10 m à son aval . Connaissant la densité du béton ρ_b = 2300 Kg/m^3 , déterminer quel seuil ne doit pas dépasser la hauteur d'eau amont h pour que le barrage ne bascule pas autour du point A (on considérera dans ce cas un ‘’ renversement ‘’ du barrage autour du point A) .



SOLUTION :

Il existe dans ce cas 3 forces en présence (voir schéma suivant) :

- La force de pression hydrostatique $\mathbf{F_1}$ exercée par la hauteur d'eau amont h ayant tendance à **renverser** le barrage autour du point A
- La force de pression hydrostatique $\mathbf{F_2}$ exercée par la hauteur d'eau aval y ayant tendance à **stabiliser** le barrage autour du point A
- La force due au poids du barrage **W** ayant tendance à **stabiliser** le barrage autour du point A



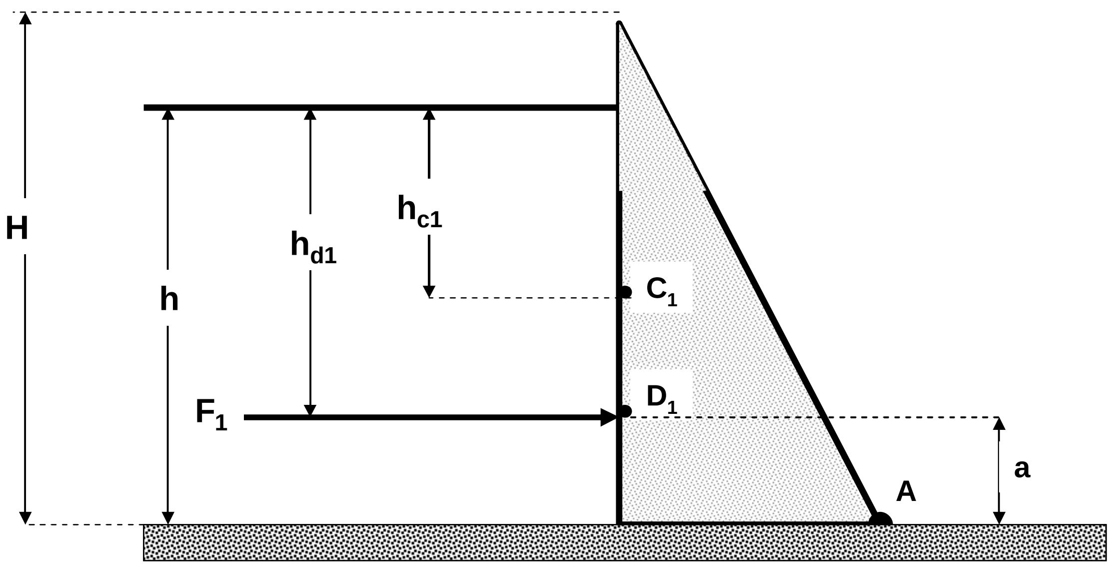
Ainsi , la condition de renversement du barrage autour du point A s'écrit :

$$M_A W + M_A F_2 > M_A F_1$$

Avec :

- $M_A W$: Moment du poids W par rapport au point A
- $M_A F_1$: Moment de la force F_1 par rapport au point A
- $M_A F_2$: Moment de la force F_2 par rapport au point A

1.- Calcul de $M_A F_1$ (voir schéma suivant) :



- *Calcul de F_1 :*

$F_1 = \rho_\omega g hc_1 A_1$ avec : $A_1 = hxL$ et $hc_1 = \frac{h}{2}$, d'oû :

$$\boxed{F_1 = \rho_\omega g \frac{h}{2} hL = \rho_\omega g \frac{h^2}{2} L}$$

- *Calcul de la distance a :*

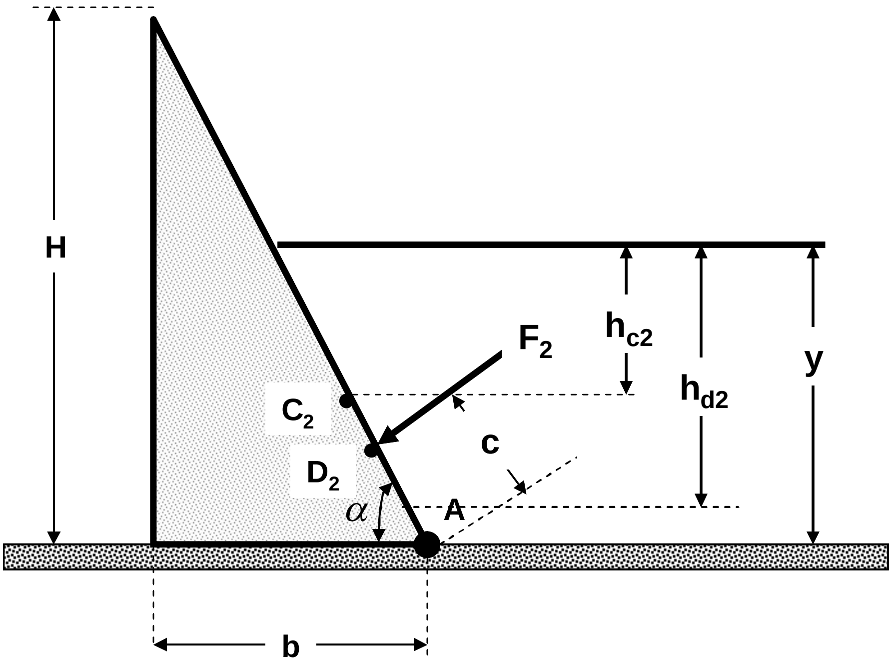
$a = h - hd_1$ avec $hd_1 = hc_1 + \frac{Icc}{hc_1 A_1}$ avec Icc : moment d'inertie de la face amont du barrage (rectangulaire) = $Icc = \frac{Lh^3}{12}$

Et donc : $hd_1 = \frac{h}{2} + \frac{\frac{Lh^3}{12}}{\frac{h}{2} Lh} = \frac{h}{2} + \frac{h}{6} = \frac{2}{3} h$ et par conséquent : $a = h - \frac{2}{3} h = \frac{h}{3}$

Et finalement , l'expression finale de ***$M_A F_1$ devient :***

$$\boxed{M_A F_1 = F_1 xa = \rho_\omega g \frac{h^2}{2} Lx \frac{h}{3} = \rho_\omega g \frac{h^3}{6} L}$$

2.- Calcul de $M_A F_2$ (voir schéma suivant) :



Soient C_2 et D_2 les centres de gravité et le point d'application de la force F_2 . Si la distance entre l'axe d'application de la force F_2 et le point A est c , on peut écrire :

$$M_A F_1 = F_1 x c$$

- *Calcul de F_2 :*

La face aval du barrage étant inclinée , il faudra déterminer l'angle d'inclinaison et calculer la surface sur laquelle s'exerce la force F_2 . Soit x la largeur de cette surface :

$x = y \sin\alpha$; Pour déterminer l'angle α , on utilise le triangle de hauteur H et de largeur b :

$tg\alpha = \frac{H}{b} = \frac{30}{15} = 2$ d'où : $\alpha = 63.4°$

Et donc :

$F_2 = \rho_\omega g hc_2 A_2$ avec : $A_2 = y \sin\alpha x L$ et $hc_2 = \frac{y}{2}$, d'où :

$$\boxed{F_2 = \rho_\omega g \frac{y}{2} y L \sin\alpha = \rho_\omega g \frac{y^2}{2} L \sin\alpha}$$

- *Calcul de la distance c :*

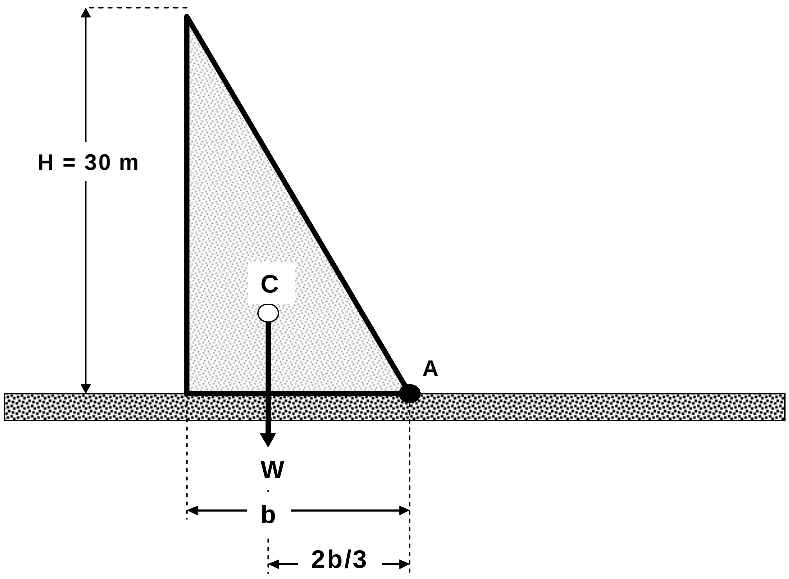
$c = y\sin\alpha - hd_2 \sin\alpha$ avec $hd_2 = hc_2 + \frac{Icc}{hc_2 A_2}$ avec Icc : moment d'inertie de la face aval inclinée du barrage (rectangulaire) = $Icc = \frac{L(y\sin\alpha)^3}{12}$

Et donc : $hd_2 = \frac{y}{2} + \frac{\frac{Ly^3 \sin^3\alpha}{12}}{\frac{y}{2} Ly\sin\alpha} = \frac{y}{2} + \frac{y\sin^2\alpha}{6}$ et par conséquent : $c = \frac{y}{2}\left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{3}\right)$

Et finalement , l'expression finale de ***$M_A F_1$* devient :**

$$\boxed{M_A F_2 = F_2 x c = \rho_\omega g \frac{y^3}{4} L \sin\alpha \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{3}\right)}$$

3.- Calcul de $M_A W$ (voir schéma suivant) :



Le centre de gravité du barrage (triangle) étant situé à 2/3 de la largeur b par rapport au point A, on aura donc :

$M_A W = Wx\frac{2}{3}b$ et comme $W = \rho_b g\left(\frac{bH}{2}\right)L$ on aura : $\boxed{M_A W = \frac{1}{3}\rho_b g b^2 HL}$

4.- Calcul de la condition sur la hauteur d'eau amont h :

Revenons maintenant à la condition de départ :

$$M_A W + M_A F_2 > M_A F_1$$

Avec :

$$M_A W = \frac{1}{3}\rho_b g b^2 HL$$

$$M_A F_2 = F_2 xc = \rho_\omega g \frac{y^3}{4} L \sin\alpha\left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{3}\right)$$

$$M_A F_1 = F_1 xa = \rho_\omega g \frac{h^2}{2} Lx \frac{h}{3} = \rho_\omega g \frac{h^3}{6} L$$

Et donc :

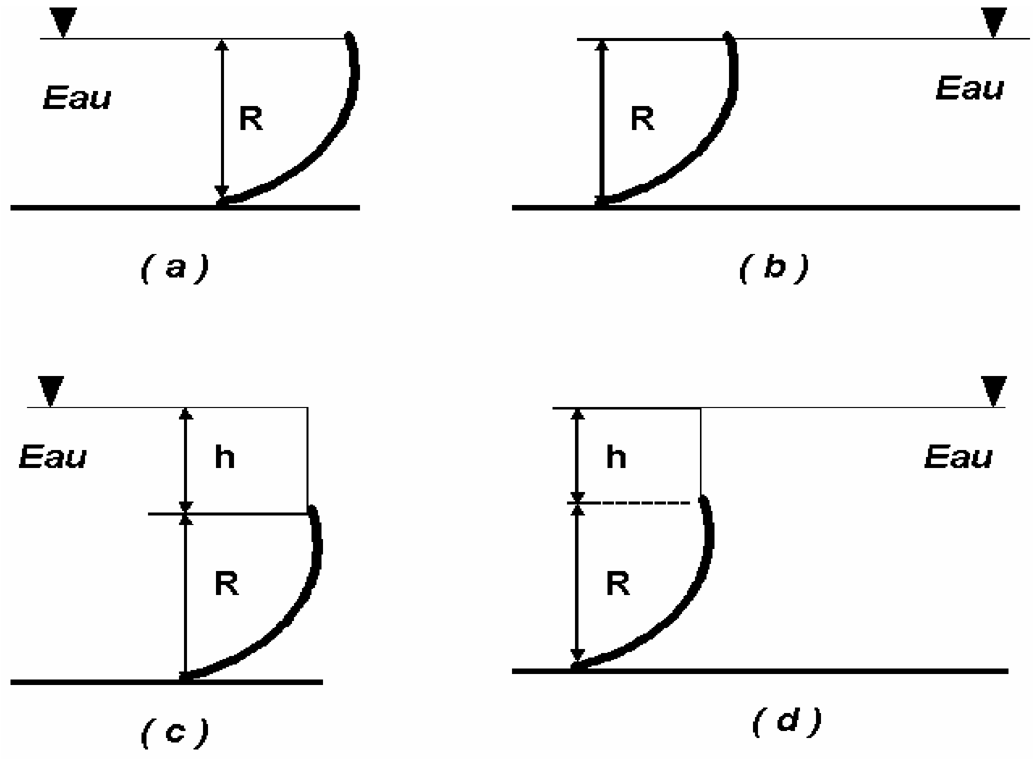
$$\frac{1}{3}\rho_b g b^2 HL + \rho_\omega g \frac{y^3}{4} L \sin\alpha\left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{3}\right) > \rho_\omega g \frac{h^3}{6} L$$

$$h^3 \leq 2\frac{\rho_b}{\rho_\omega} b^2 H + \frac{2}{3} y^3 \sin\alpha\left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{3}\right)$$

Et : $$h \leq \sqrt[3]{2\frac{\rho_b}{\rho_\omega}b^2H + \frac{2}{3}y^3 \sin\alpha\left(1+\frac{\sin^2\alpha}{3}\right)}$$

A.N : $$h \leq 31{,}65\,m$$

- *Exercice 7* : Calculer la force résultante exercée sur les surfaces courbes des figures suivantes de largeur L = 2m et de rayon R = 3m .



SOLUTION :

1.- Schéma (a) :

on sait que : $F_R = \sqrt{F_H^{\ 2} + F_V^{\ 2}}$

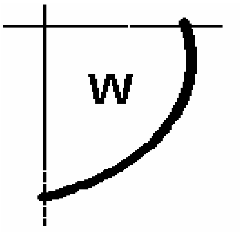
et : $F_H = \rho_\omega g h_c A' = \rho_\omega g\left(\frac{R}{2}\right)(RL) = \frac{1}{2}\rho_\omega g R^2 L$

avec : A' = Projection verticale de la surface courbe = RL

AN : $F_H = \frac{1}{2}.10^3.9{,}814.3^2.2 = 88326N = 88{,}3KN$

$$F_V = \rho_\omega g W = \rho_\omega g \frac{\pi R^2}{4} L$$

Le volume W est délimité par la surface courbe , celle de l'eau et les 2 verticales menées des 2 extrémités de la courbe comme le montre le schéma suivant :



AN : $F_V = 10^3.9{,}814.\frac{\pi 3^2}{4}.2 = 138672N = 138{,}7KN$ avec F_V dirigée vers le bas.

Et donc :

$$F_R = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2} = \sqrt{88{,}3^2 + 138{,}7^2} = 164{,}4KN$$

2.- Schéma (b) :

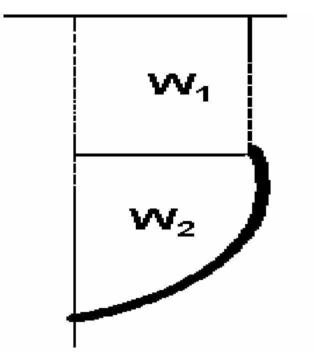
Les calculs de F_H et F_V restent identiques que le schéma (a) sauf que la force F_V est dirigée vers le haut .

3.- Schéma (c) et (d) :

* $F_H = \rho_\omega g h_c A' = \rho_\omega g\left(\frac{R}{2} + h\right)(RL) = 10^3.9{,}814.(\frac{3}{2} + 1{,}5).3.2 = 176652N = 176{,}6KN$

* $F_V = \rho_\omega g W = \rho_\omega g(\frac{\pi R^2}{4} + Rh)L = 10^3.9{,}814.(\frac{\pi 3^2}{4} + 3.1{,}5).2 = 226998N = 227KN$

avec le volume W montré par le schéma suivant :



$W = W_1 + W_2$

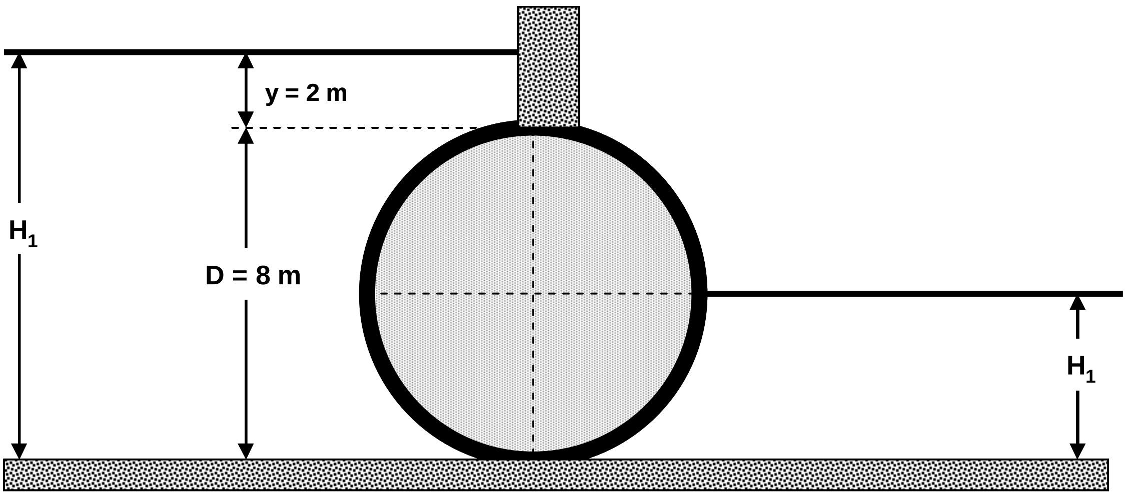
avec :

- Cas (c) : F_V dirigée vers le bas
- Cas (d) : F_V dirigée vers le haut

Et finalement :

$$F_R = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2} = \sqrt{176{,}6^2 + 227^2} = 287{,}6KN$$

- ***Exercice 8*** : Calculer les 2 forces exercées par les 2 niveaux d'eau amont (H_1) et aval (H_2) sur la vanne cylindrique de diamètre D et de longueur L = 2 m .



SOLUTION :

1.- Calcul de la force amont F_1 :

On sait que : $F_1 = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2}$

Avec : $F_H = \rho_\omega g h_c A'$ avec $h_c = \frac{D}{2} + y$ et $A' = DL$

Et donc :

$$F_H = \rho_\omega g \left(\frac{D}{2} + y\right) DL = 10^3 x9{,}814 x \left(\frac{8}{2} + 2\right) x8x2 = 942144\,N \approx 942kN$$

Et $F_V = \rho_\omega g W$ avec $W = \frac{\pi D^2}{8} L$

Et donc : $\boxed{F_V = \rho_\omega g \frac{\pi D^2}{8} L = 10^3 x 9{,}814 x \frac{3{,}14 x 8^2}{8} x2 = 493055\,N \approx 493 kN}$

Et finalement :

$$\boxed{F_1 = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2} = \sqrt{942^2 + 493^2} = 1063 kN}$$

2.- Calcul de la force amont F_2 :

On sait que : $F_2 = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2}$

Avec : $F_H = \rho_\omega g h_c A'$ avec $h_c = \frac{\frac{D}{2}}{2} = \frac{D}{4}$ et $A' = \frac{D}{2} L$

Et donc :

$$\boxed{F_H = \rho_\omega g \left(\frac{D}{4}\right)\frac{D}{2} L = \rho_\omega g \frac{D^2}{8} L = 10^3 x 9{,}814 x \frac{8^2}{8} x2 = 157024\,N \approx 157 kN}$$

Et $F_V = \rho_\omega g W$ avec $W = \frac{\pi D^2}{16} L$

Et donc : $\boxed{F_V = \rho_\omega g \frac{\pi D^2}{16} L = 10^3 x 9{,}814 x \frac{3{,}14 x 8^2}{16} x2 = 246528\,N \approx 246 kN}$

Et finalement : $\boxed{F_2 = \sqrt{F_H{}^2 + F_V{}^2} = \sqrt{157^2 + 246^2} = 292 kN}$