Chapitre 1 : Analyse combinatoire

Arrangements avec répétitions

$A^p{}_n = n^p$ avec $1 \geq p \geq n$

Arrangements sans répétition

$A^p{}_n = \frac{n!}{(n-p)!}$ avec $1 \geq p \geq n$

Permutations sans répétition

$A_n{}^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$

Permutations avec répétitions

$P_n = \frac{n!}{k!}$

Combinaisons sans remise

$C_n{}^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ notée $({}_n{}^p)$ avec $1 \geq p \geq n$

Combinaisons avec remise

$C_{n+p-1}{}^p = (n+p-1)!p!(n-1)!$

Chapitre 2 : introduction au calcul des probabilités

Opération sur les ensembles

Soient A et B deux ensembles quelconques. Les opérations sur les événements sont: des **unions**, des **intersections**, et des **complémentaires**.

Algèbre des ensembles

$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup \varnothing = A$	$A \cap E = A$
$A \cup E = E$	$A \cap \varnothing = \varnothing$
$A \cup \complement_A = E$	$A \cap \complement_A = \varnothing$
$\complement\complement_A = A$	$\complement_E = \varnothing,\ \complement_\varnothing = E$
$\complement_{(A \cup B)} = \complement_A \cap \complement_B$	$\complement_{(A \cap B)} = \complement_A \cup \complement_B$

Chapitre 3 : Eléments de calcul des Probabilités

Une probabilité

$$\mathrm{Pr}\ (\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{card}\ (\mathrm{A})}{\mathrm{card}\ (\Omega)}$$

$$\mathrm{Pr}\ (\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments dans A}}{\text{nombre total d'éléments}}\ ;\ \mathrm{Pr}\ (\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre de cas favorable}}{\text{nombre de cas possible}}$$

Ensemble fondamental

Pour une expérience aléatoire donnée, l'ensemble des résultats possibles est appelé l'ensemble fondamental.

Evénement

Un événement A est un sous ensemble de E, c'est-à-dire un ensemble de résultats.

Chapitre 4 : Probabilité conditionnelle

La probabilité conditionnelle de A, sachant que l'événement B est réalisé, est notée Pr (A / B) et est définie par la relation suivante:

$$\Pr(A / B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

$$\Pr(A / B) = \frac{\text{nombre de réalisations possibles de A et B en même temps}}{\text{nombre de réalisations de B}}$$

Théorème de la multiplication

$\Pr(A \cap B \cap C) = \Pr(A) \cdot \Pr(B/ A) \cdot \Pr(C/ A \cap B)$

Formule des probabilités totales

Soit A un évènement tel que $0 < P(A) < 1$. Pour tout évènement B, on a

$P(B) = P(B/A)\, P(A) + P(B/A^c)\, P(A^c)$

Théorème de Bayes

$$\Pr(Ai / B) = \frac{\Pr(B / Ai) \cdot \Pr(Ai)}{\Pr(B / A1)\Pr(A1) + \Pr(B / A2)\Pr(A2) + \Pr(B / A3)\Pr(A3) + \Pr(B / An)\Pr(An)}$$

Indépendance entre événements

A et B sont indépendants si et seulement si $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$

Chapitre 5 : Variables aléatoires

Une variable aléatoire est un nombre dépendant du résultat d'une expérience aléatoire.

Pour déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire X il faut:

1) déterminer toutes les valeurs que peut prendre X, que l'on note x_1, x_2, x_3…
2) Pour chaque valeur, déterminer la probabilité : $P(x_1)$, $P(x_2)$…que l'on note aussi $P(X=x_1)$, $P(X=x_2)$…

Espérance mathématique

$$\mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n .$$

Variance et écart-type

$V(X) = E([X-E(X)]^2)$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$$\sigma_X = \sqrt{var(X)}.$$

Fonction de répartition

$F(x) = Pr(X \leq x)$ pour tout $x \in \Re$

Si X est une variable aléatoire discrète on a

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} Pr(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

F(x) est une fonction monotone croissante, c'est-à-dire

$F(a) \geq F(b)$ si $a \geq b$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

Chapitre 6 : Lois de Probabilité

Loi uniforme

$P(X=x_i)=1/n$

Espérance et variance

$E(X) = (n+1)/2$

$V(X) = (n^2-1)/12$.

Loi de Bernoulli

La loi de probabilité associée à la variable de Bernoulli X telle que,

$P(X=0)=q$

$P(X=1)=p$ avec $p+q=1$

Espérance et variance

$E(X)=p$

$V(X)=pq$

Loi binomiale

La probabilité que $X=k$, c'est à dire l'obtention de k succès au cours de n épreuves indépendantes est : $P(X=k)=C^k_n\, p^k\, q^{n-k}$

Espérance et variance

$E(X)=np$

$V(X)=npq$

Chapitre 7 : Généralités sur la statistique descriptive

Effectifs (fréquences absolues)

Les effectifs ou fréquences absolues s'écrivent ni. Et la somme des effectifs est égale à n.

Fréquences relatives et pourcentages

$f\,i = n\,i / N$

Pourcentage de la valeur i = $f\,i$ x 100

Chapitre 8 : Les caractéristiques de tendance centrale

La moyenne arithmétique simple

$X = 1 / N \sum x\,i$

La moyenne arithmétique pondérée

$X = 1 / N \sum (x\,i\,n\,i)$

La médiane

La médiane d'une série est la valeur qui partage la série, préalablement classée, en deux séries aux effectifs égaux.

Calcul de la médiane : effectifs groupés par classes de valeurs

$$M_e = x_i^{\inf} + a_i \left[\frac{\frac{n}{2} - N(x_{i-1})}{n_i} \right]$$

Où :
X_i^{inf} Borne inférieure de la classe médiane.
$N(x_{i-1})$ Effectif cumulé strictement inférieur à xi
xi Classe médiane
ai Amplitude de la classe médiane

Le mode

Le mode d'une série donnée correspond à la valeur ou à la modalité la plus fréquente.

Calcul du mode : Données groupées en classes

La classe modale est la classe ayant la plus haute fréquence (relative ou absolue).

$$Mo = \text{ai} + \frac{\Delta 1}{\Delta 1 + \Delta 2} L$$

Δ_1 : différence entre l'effectif de la classe modale et l'effectif de la classe précédente.
Δ_2 : différence entre l'effectif de la classe modale et l'effectif de la classe qui suit.
a_i Borne inférieure de la classe modale.
L Largeur, amplitude de la classe modale

Chapitre 9 : Les caractéristiques de dispersion

L'étendue (intervalle de variation)

IV = X max – X min

L'intervalle interquartile

Il se calcule en procédant aux quatre étapes suivantes:

1) Classement des données de la série par ordre croissant.

2) Trouver la médiane de la série pour séparer celle-ci en deux séries : la première série contient les données inférieures à la médiane et la seconde les données supérieures à la médiane.

3) Déterminer la médiane des deux nouvelles séries, sans inclure dans aucune d'elle la médiane de la série initiale. La médiane de la première série est appelée « premier quartile » et désigné par Q1. La médiane de la seconde série est appelée « second quartile » et désigné par Q3.

4) Calculer IQ, l'intervalle interquartile par la formule :

IQ Q3 – Q1

La variance

Var $(x) = \frac{1}{N} \sum ni\ (xi\text{- X})^2$

Var $(x) = \frac{1}{N} \sum ni\ (xi)^2 - (X)^2$

L'écart-type

L'écart-type est égal à la racine carrée de la variance :

$o(x) = \sqrt{\text{Var}\ (x)}$

Le coefficient de variation

$\text{CV} = \frac{\sqrt{\text{Var}\ (x)}}{X}\ 100$