Exercice 01:

① $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 3^n + 1 \geq 3^n$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+3^n} \leq \frac{1}{3^n} \Rightarrow \frac{2^n}{1+3^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1p

Comme $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ est convergente (série géométrique $q = \frac{2}{3} < 1$) alors $\sum \frac{2^n}{1+3^n}$ est convergente

② $\sum \frac{1}{2^{n^2}}$, $\quad u_n = \frac{1}{2^{n^2}}$

1p

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2^{n^2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n} \frac{1}{2^n} = 0 < 1$$

La série est convergente D'après le critère de Cauchy

③ $\sum \frac{1}{n!}$ $\quad u_n = \frac{1}{n!}$

1p

$$\lim_{n} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n} \frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= \lim_{n} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cancel{n!}} = \lim_{n} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

La série est Convergente D'après le critère de D'Alembert

④ $\sum \frac{1}{n}$ Posons $f(n) = \frac{1}{n}$

f positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$

$$\int_1^t f(n)\,dn = \int_1^t \frac{1}{n}\,dn = \Big[\ln n\Big]_1^t = \ln t$$

$$\lim_{t \to +\infty} \int_1^t f(n)\,dn = \lim_{n \to +\infty} \ln t = +\infty$$

Donc la série est divergente

Corrigé de l'exercice 02

① $\int (x^4 + 2x - 1)\,dx = \frac{x^5}{5} + x^2 - x + C$ ①

② $\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C$ ①

③ $\int 3x e^{x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int 2x e^{x^2}\,dx = \frac{3}{2} e^{x^2} + C$ ①

④ $\int \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx = \frac{-1}{2}\int \frac{-2}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{(2x+1)}\right) + C$ 1,5

⑤ $\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

$u(x) = \ln x \qquad u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{x^2} \qquad v(x) = \frac{-1}{x}$

$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \frac{-\ln x}{x} - \int \frac{-1}{x^2}\,dx$ ②

$= \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ 0,5

Exercice 03

$\sum_i P_i = 1$

$X = X_i$	0	1	2	3
$P_i = P(X = X_i)$	$\frac{C_3^0 C_9^3}{C_{12}^3}$ $\frac{84}{220}$	$\frac{C_3^1 C_9^2}{C_{12}^3}$ $\frac{108}{220}$	$\frac{C_3^2 C_9^1}{C_{12}^3}$ $\frac{27}{220}$	$\frac{C_3^3 C_9^0}{C_{12}^3}$ $\frac{1}{220}$
	01	01	01	01

3°/ $P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{28}{220}$ 1

$P(X > 3) = 0$ 01

$P(X < 2) = 1 - P(X \geq 2) = \frac{192}{220}$ 01

4°) $E(X) = \bar{X}$ (Espérance = valeur moyenne).

$E(X) = \frac{\sum_i P_i X_i}{\sum_i P_i}$, $\sum_i P_i = 1$ 1

$E(X) = \frac{165}{220}$

. La variance $V(X) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\bar{X} - X_i)^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$

$E(X^2) = \sum_{i=0}^{3} P_i X_i^2 = \frac{225}{220}$ 4

alors : $Var(X) = \frac{225}{220} - \left(\frac{165}{220}\right)^2 = 0,46$